مروری بر معادلات دیفرانسیل معمولی و مشتق‌های جزئی

تعریف - یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی عبارت است از رابطه‌ای بین یک تابع یک متغیره $y=f(x)$ و متغیر آن (x) و مشتق یا مشتق‌های تابع برحسب متغیر $(y', y'', \ldots)$ تا مرتبه معینی به صورت:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right) = 0 \qquad (1)$$

بزرگترین مرتبه مشتق ظاهر شده در معادلهٔ (۱) را مرتبه یا رستهٔ معادله دیفرانسیل نامند.

به عنوان مثال $y'-y+x=0$ یک معادلهٔ دیفرانسیل از رستهٔ یک و $y''-y+x=0$ یک معادلهٔ دیفرانسیل از رستهٔ دو است.

هر تابعی که در یک معادلهٔ دیفرانسیل صدق کند به آن یک جواب (خصوصی) معادله گفته می‌شود. به عنوان مثال تابع $y=x+1$ یک جواب معادلهٔ $y'-y+x=0$ است، زیرا

$$y=x+1 \Rightarrow y'=1 \Rightarrow y'-y+x=1-(x+1)+x=0$$

این تنها جواب معادله نیست، توابع $y=e^x+x+1$ ، $y=4e^x+x+1$ هم جوابهای این معادله می‌باشند. تمام جوابهای معادله را می‌توان در قالب یک تابع کلی $y=ce^x+x+1$ نشان داد که به آن جواب عمومی معادله گفته می‌شود که در آن c ثابتی است دلخواه.

جواب عمومی معادلهٔ $y''-y+x=0$ عبارت است از: $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+x$
که در آن c_1 و c_2 مقادیر ثابت و دلخواه هستند.

ثابت می‌شود که تعداد ثابت‌های دلخواه ظاهر شده در جواب عمومی معادله، دقیقاً برابر است با رستهٔ آن معادله. این ثابت‌ها در حین انتگرال‌گیری از معادله تا رسیدن به جواب پدیدار می‌شوند.

ساده‌ترین معادلهٔ دیفرانسیل رستهٔ یک، معادله تفکیک پذیر و یا جدا شدنی نام دارد که اگر آن را برحسب x و y و dx و dy

بنویسیم ، نهایتاً به صورت $P(x)dx+Q(y)dy=0$ (۲) در می‌آید
با انتگرال گیری از طرفین این معادله :

$$\int P(x)dx+\int Q(y)dy=C \quad (3)$$

محاسبه انتگرال ها و ساده کردن جواب ، به جواب عمومی معادله دست می‌یابیم

مثال ۱) حل معادلهٔ : $y'+xy=0$

حل :

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}+xy=0 \Rightarrow \frac{1}{y}dy+xdx=0 \quad \left(P(x)=x \text{ و } Q(y)=\frac{1}{y}\right)$$

فرض کنید $y>0$:

$$\int \frac{1}{y}dy+\int xdx=C \Rightarrow \ln y+\frac{1}{2}x^2=C$$

$$\Rightarrow \ln y=C-\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y=e^{C-\frac{1}{2}x^2}=e^C\times e^{-\frac{1}{2}x^2}=Ae^{-\frac{1}{2}x^2}$$

که C و در نتیجه $A>0$ یک ثابت دلخواه است .

درحالتی که $y<0$ باشد باز هم به همین جواب می‌رسیم یعنی :
$y=Ae^{-\frac{1}{2}x^2}$ با $A<0$. در هر صورت $y=Ae^{-\frac{1}{2}x^2}\ ,\ A\in\mathbb{R}$
جواب عمومی معادله است .

مثال ۲) (مهم) : حل معادله :

$$\frac{dT}{dt}+\lambda T=0$$

(T : تابع و $T>0$ ، t : متغیر و λ عدد مفروض و مثبت است) .

حل :

$$\Rightarrow \frac{dT}{T}+\lambda dt=0 \Rightarrow \ln T+\lambda t=C \Rightarrow T=e^{C-\lambda t}=e^C\cdot e^{-\lambda t}$$

$e^C=C_0$ پس جواب عمومی معادله :

$$T(t)=C_0e^{-\lambda t}$$

(بعداً در حل معادله انتشار به این معادله برخورد می‌کنیم که t متغیر زمان است)

معادله دستهٔ یک ، معادلهٔ دیفرانسیل خطی (۴) $y'+P(x)y=Q(x)$ است . که فرمول حل آن چنین است :

$$y'+P(x)y=Q(x) \Longrightarrow y(x)=e^{-\int P(x)\,dx}\left(\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx+C\right) \quad (۵)$$

مثال (۳) حل معادلهٔ $y'-y+x=0$ حل : $y'-y=-x$

این یک معادلهٔ خطی است با $P(x)=-1$ و $Q(x)=-x$:

$$\Rightarrow e^{-\int P(x)\,dx}=e^{-\int(-1)\,dx}=e^{x} \quad \text{و} \quad e^{\int P(x)\,dx}=e^{-x}$$

با قرار دادن این ها در فرمول (۵) بدست می آوریم :

$$y=e^{x}\left(\int(-x)\,e^{-x}\,dx+C\right)=e^{x}\left(-\int x\,e^{-x}\,dx+C\right)$$

ولی با بکارگیری روش جزء به جزء : $\int x\,e^{-x}\,dx=-x\,e^{-x}-e^{-x}$

$$\Rightarrow y=e^{x}\left(x\,e^{-x}+e^{-x}+C\right)=x+1+C\,e^{x}$$

ساده ترین معادله رستهٔ دوم ، معادله خطی و با ضریب های ثابت است به صورت : (۶) $y''+ay'+by=0$ که $y'=\frac{dy}{dx}$ و $y''=\frac{d^2y}{dx^2}$

a و b مقادیر ثابتی هستند مثلاً $y''-3y'+2y=0$ و یا $y''+4y=0$

برای حل معادلهٔ (۶) ابتداء معادله درجه دوم (۷) $m^2+am+b=0$ تشکیل می دهیم (به معادله جبری (۷) معادله مفسر و یا معادله مشخصه گفته می شود) و آن را حل می کنیم :

الف - اگر $\Delta=a^2-4b>0$ ، آنگاه ریشه های معادله (۷) حقیقی و متمایزند و :

$$m_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

آنگاه تابع : $y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۶) است.

ب - اگر $\Delta = a^2 - 4b = 0$ ، آنگاه معادله (۷) دارای دو ریشه حقیقی و برابر $m_1 = m_2 = -\frac{a}{2}$ است. در این حالت جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۶) به این صورت نوشته می‌شود:

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}$$

پ - اگر $\Delta = a^2 - 4b < 0$. تحت این شرط معادله (۷) دارای دو ریشه موهومی (و مزدوج) $m_1 = \alpha + i\beta$ و $m_2 = \alpha - i\beta$ (توجه: $i = \sqrt{-1}$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ و $\beta \neq 0$) است.

وجواب عمومی معادله (۷):

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$$

مثال ها:

مثال (۴) حل معادله $y'' - 3y' + 2y = 0$ حل:

معادله مفسر: $m^2 - 3m + 2 = 0$ و ریشه آنها $m_1 = 1$ و $m_2 = 2$

وجواب عمومی معادله: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$

مثال (۵) حل معادله $X'' - \lambda^2 X = 0$ ($X'' = \frac{d^2X}{dx^2}$ ، X: تابع ، x: متغیر)

(حل) معادله مفسر: $m^2 - \lambda^2 = 0 \Leftarrow m^2 = \lambda^2$ ، $m = \pm\lambda$

وجواب عمومی معادله: $X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$

مثال (۶) حل معادله $y'' + 6y' + 9y = 0$. حل:

$\Rightarrow$ معادله مفسر: $m^2 + 6m + 9 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}(-6 \pm \sqrt{36 - 4\times 9})$

(حالت ب) $\Rightarrow m_1, m_2 = \frac{1}{2}(-6 \pm 0) \Rightarrow m_1 = m_2 = -3$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$$

مثال (۷) حل معادله $y'' - 4y' + 13y = 0$ حل:

$\Rightarrow$ معادله مفسر: $m^2 - 4m + 13 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}(4 \pm \sqrt{16 - 52})$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{2}(4 \pm \sqrt{-36}) = \frac{1}{2}(4 \pm \sqrt{36}\times\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}(4 \pm 6i) = 2 \pm 3i$$

(حالت پ)

$$\Rightarrow \begin{matrix} \alpha + i\beta = 2+3i \\ \alpha - i\beta = 2-3i \end{matrix} \Longrightarrow \alpha = 2 , \beta = 3 \Rightarrow y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$$

و : یا $y(x) = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

مثال (۸) (مهم) حل معادله $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ $\left(X''(x) = \dfrac{d^2X}{dx^2} \right)$ حل :

معادله مفسر : $m^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow m^2 = -\lambda^2 \Rightarrow m = \pm\lambda\sqrt{-1} = \pm\lambda i$

$$\begin{matrix} \alpha + i\beta = \lambda i \\ \alpha - i\beta = -\lambda i \end{matrix} \Rightarrow \alpha = 0 , \beta = \lambda \Rightarrow X(x) = e^{0 \times x}(c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x)$$

یا

$$X(x) = c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x$$

توجه کنید. مثالهائی که در آنها کلمه (مهم) آمده است. بعداً در قسمت اصلی درس با آنها برخورد می‌کنیم.

در صورتی که معادلات خطی دارای طرف دوم $f(x)$ باشند یعنی داشته باشیم

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (8)$$

برای حل آنها ، ابتداء مطابق شرح بالا جواب عمومی معادلهٔ (۷) $y'' + ay' + by = 0$ را بدست می‌آوریم وسپس یک جواب خصوصی معادلهٔ (۸) را به آن اضافه می‌کنیم. به دو مثال زیر توجه کنید.

مثال (۹) جواب عمومی معادلهٔ $y'' - y = x^2 + 1$ را بدست آورید.

حل (۱) ابتداء جواب عمومی معادلهٔ $y'' - y = 0$ را تعیین می‌کنیم :

معادله مفسر : $m^2 - 1 = 0$ وریشه‌های آن $m = \pm 1$ (حقیقی ومتمایز)

پس جواب عمومی معادلهٔ بدون طرف دوم $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$ است.

(۲) سپس یک جواب خصوصی معادلهٔ $y'' - y = x^2 + 1$ را پیدا می‌کنیم وآن را به تابع بالا اضافه می‌کنیم

با توجه به اینکه طرف چپ معادله یک تابع درجه دو است ، این جواب خصوصی را به صورت تابع درجه دو $y_p = Ax^2 + Bx + C$ در نظر می‌گیریم

و ضریب ها ی این تابع را برای اینکه در معادله صدق کند ، بدست می آوریم
به عبارت دیگر این تابع را در معادله می بریم

$$y''-y=\underbrace{2A}_{y''}-\underbrace{(Ax^2+Bx+C)}_{y}=x^2+1$$

سپس ضریب توانهای همسان
در دو طرف را برابر هم قرار می دهیم :

$\Rightarrow$ ضریب x^2 : $-A=1$

x " : $-B=0$

ثابت : $2A-C=1$

$$\Rightarrow A=-1 \,,\, B=0 \,,\, C=-3 \Rightarrow y_p=-x^2-3$$

و جواب عمومی معادله اصلی :

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}-x^2-3$$

مثال (۱۰) حل معادله :

$$y''-4y'+4y=2\cos x$$ حل :

الف) تعیین جواب عمومی معادله $y''-4y'+4y=0$ ، معادله مفسر :

$\Leftarrow m^2-4m+4=0$ و ریشه های آن $m_1=m_2=2$. لذا جواب عمومی معادله
بدون طرف دوم خواهد شد :

$$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$$

ب) تعیین یک جواب خصوصی معادله :

$y''-4y'+4y=2\cos x$.

با توجه به طرف دوم معادله این جواب را به صورت
$y_p=A\cos x+B\sin x$ در نظر می گیریم و با بردن y_p در معادله و تقابله دو طرف ، دو ضریب A و B را حساب می کنیم :

$$\Rightarrow y=A\cos x+B\sin x\Rightarrow y'=-A\sin x+B\cos x\Rightarrow y''=-A\cos x-B\sin x$$

$$\Rightarrow y''-4y'+4y=-A\cos x-B\sin x-4(-A\sin x+B\cos x)+4(A\cos x+B\sin x)$$
$$\equiv 2\cos x$$

ضریب $\cos x$ در دو طرف : $3A-4B=2$

ضریب $\sin x$ در دو طرف : $3B+4A=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{6}{25} \\ B=-\dfrac{8}{25}\end{cases} \Rightarrow y_p=\frac{2}{25}(3\cos x-4\sin x)$$

و جواب مسأله :

$$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+\frac{2}{25}(3\cos x-4\sin x)$$

۴۲ شد

مشتقات جزئی (پاره‌ای) یک تابع دو متغیره

تابع دو متغیره $u = f(x,y)$ با متغیرهای مستقل x و y که در دامنهٔ مفروضی تعریف شده است در نظر می‌گیریم. برای این تابع مشتق‌های جزئی که با نمادهای $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ یا $f'_x(x,y)$ و $f'_y(x,y)$ نشان می‌دهیم در نقطهٔ (x,y)، این چنین تعریف می‌شوند.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

عملاً محاسبهٔ مشتق‌های جزئی همانند محاسبهٔ مشتق یک تابع یک متغیره است، بطوریکه در محاسبهٔ $\frac{\partial u}{\partial y}$، y را ثابت (همانند یک پارامتر) در نظر گرفته و از u برحسب x به مشابه یک تابع یک متغیره مشتق می‌گیریم عین همین توصیف هم برای محاسبهٔ $\frac{\partial u}{\partial y}$ صورت می‌گیرد. بنابراین تمام قواعد مشتق‌گیری در توابع یک متغیره، برای محاسبهٔ مشتق‌های جزئی بکار گرفته می‌شود.

همانند توابع یک متغیره مشتق‌های جزئی مرتبهٔ دوم و سوم و ... تعریف می‌شود بطوریکه: مشتق‌های خالص

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y}$$

مشتق‌های مرکب

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}$$

تحت شرایطی دو مشتق آخری با هم برابرند. بنابراین یک تابع دو متغیره عملاً دارای سه مشتق مرتبهٔ دوم متمایز دارد.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$: از u دوبار متوالی با ثابت نگه داشتن y در هر دوبار نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$: از تابع u دوبار متوالی با ثابت نگه داشتن x در هر دوبار، نسبت به y مشتق می‌گیریم.

$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$: ابتدا از تابع U (با ثابت نگه داشتن y) برحسب x مشتق می‌گیریم و سپس از نتیجه آن برحسب y (با ثابت نگه داشتن x) مشتق می‌گیریم و یا این کار را برعکس انجام می‌دهیم.

مثال (۱) برای تابع $(x,y) \neq (0,0)$ $U = \ln(x^2+y^2)$ مشتق‌های جزئی مرتبه‌های اول و دوم را حساب کنید و نشان دهید:

$$(a)\quad x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} = 2 \quad , \quad (b)\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

حل:

$$U = \ln(x^2+y^2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$(a)\quad x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} = x \times \frac{2x}{x^2+y^2} + y \times \frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{2x^2+2y^2}{x^2+y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \times 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \times 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{0 \times (x^2+y^2) - 2x \times 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

(b) دیده می‌شود که $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

مثال (۲) با فرض $U = x f\left(\frac{y}{x}\right)$ نشان دهید:

$$x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} = U$$

که f تابعی است دلخواه (مهم)

توضیح: $f\left(\frac{y}{x}\right)$ در واقع یک تابع تک متغیره دلخواه $f(t)$ است که بجای t، $\frac{y}{x}$ قرار دهیم چند مثال در مورد این تابع U

$$U = x e^{y/x} \quad (f(t) = e^t) \quad , \quad U = x\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2+y^2} \quad (f(t) = \sqrt{1+t^2})$$

$x, y > 0$

$$U = x \ln\left(1+\frac{y}{x}\right) \quad (f(t) = \ln(1+t))$$

حل: می‌گیریم $\frac{y}{x}=t$ بنابراین

$$\begin{cases} u = x f(t) \\ t = \frac{y}{x} \end{cases}$$

بکار گیری مشتق حاصلضرب و قاعده زنجیرای

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \times f(t) + x f'(t)\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$= f(t) + x f'(t) \times \frac{-y}{x^2} = f(t) - \frac{y}{x} f'(t) \quad \left(\text{توجه} \ \frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x f'(t)\frac{\partial t}{\partial y} = x f'(t) \times \frac{1}{x} = f'(t) \quad \left(\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{x}\right)$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = x\left(f(t) - \frac{y}{x} f'(t)\right) + y\left(f'(t)\right)$$

$$= x f(t) - y f'(t) + y f'(t) = x f(t) = u$$

حال سعی کنید که این سه مسئله را حل کنید.

۱- برای تابع $u = f(x^2+y^2)$، ثابت کنید: $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

۲- برای تابع $u = e^x f(x+y)$، ثابت کنید: $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = u$

۳- برای تابع $u = f(x+ay) + g(x-ay)$ $(a \neq 0)$ ثابت کنید

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(f و g توابع دلخواهی هستند)

در بالا سراغ مشتقات جزئی یک تابع دو متغیره رفتیم. مشابهاً مشتق گیری جزئی یک تابع سه متغیره تعریف می‌شوند: $u = f(x,y,z)$

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}, \ldots$$

معادلات دیفرانسیل با مشتق های جزئی

مبانی و تعاریف اولیه برای این معادلات به همان صورتی بیان می شود که برای معادلات دیفرانسیل معمولی ارائه می شود.

تعریف - یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی عبارتست از رابطه‌ای بین یک تابع چند متغیره (u) و متغیرهای مستقل آن ($x, y, \ldots$) و مشتق‌های جزئی تابع نسبت به این متغیرها

$$F\left(u, x, y, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots\right) = 0 \qquad (1)$$

بزرگترین مرتبه مشتق ظاهر شده در معادله را رسته یا مرتبه معادله دیفرانسیل نامند.

تعداد متغیرهای مستقل در معادله می تواند دو، سه، یا بیشتر باشد ما در اینجا به تعاریف و حل معادلات برای توابع دو متغیره اکتفا می کنیم

مثال ها:

$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} - u = 0$ ، یک معادلهٔ دیفرانسیل از رستهٔ یک روی تابع u و متغیرهای x و y است.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ ، یک معادلهٔ دیفرانسیل از رستهٔ دو روی تابع u و متغیرهای x و y است.

تعریف - هر تابع $u = u(x, y)$ که در یک معادلهٔ دیفرانسیل صدق کند به آن یک جواب (خصوصی) معادله گفته می شود.

به عنوان مثال تابع $u = \sqrt{x^2+y^2}$ ، $x, y > 0$ یک جواب خصوصی معادلهٔ (۲) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} - u = 0$ است زیرا:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} - u = x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} + y \times \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2} = 0$$

به غیر از تابع بالا، توابع زیر هم جوابهای این معادله هستند:

$$U = x+y \quad , \quad U = \frac{x^2+y^2}{x+y} \ (x+y \neq 0) \quad , \quad U = x \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$$

$$U = x \ln\left(1+\frac{y}{x}\right) \ (x, y > 0) \quad , \quad U = y e^{y/x}$$

به آسانی می توان مشتق های جزئی هریک از این توابع را حساب کرد و نشان داد که در معادله (۲) صدق می کنند.

کلی ترین جواب (جواب عمومی) معادله (۲) که بتوان ۶ تابع بالا را از آن استخراج کرد این گونه نیست که وابسته به یک ثابت دلخواه باشد، زیرا با تغییر یک ضریب ثابت نمی توان به جوابهای بالا با تنوع فرم ریاضی رسید. پس در جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل عنصر یا عناصر دلخواه چگونه اند؟

ثابت می شود که جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل با مشتق های جزئی وابسته به تابع (یا توابع) دلخواه می باشد، که تعداد این توابع دلخواه دقیقاً برابر است با رتبه معادله.

به عنوان مثال ثابت می شود که جواب عمومی معادله

$$x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} - U = 0 \quad (2)$$

عبارتست از

$$U = x f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3)$$

(رجوع شود به مثال (۲) صفحه (۴۱)) که f یک تابع یک متغیره دلخواه از متغیر $\frac{y}{x}$ است. جوابهای خصوصی این معادله به این ترتیب بدست می آیند که ابتدا یک تابع $f(t)$ را انتخاب کرده و سپس در آن $t \to \frac{y}{x}$ و سپس $U = x f\left(\frac{y}{x}\right)$ را ساده می کنیم برای اینکه ۶ جواب خصوصی بالا بدست آیند انتخاب $f(t)$ برای هریک به این گونه اند:

1) $f(t) = \sqrt{1+t^2} \Rightarrow U = x\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$

2) $f(t) = 1+t \Rightarrow U = x\left(1+\frac{y}{x}\right) = x+y$

۳) $f(t)=\frac{1+t^2}{1+t} \Rightarrow u=x\times\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{1+(\frac{y}{x})}=\frac{x^2+y^2}{x+y}$

٤) $f(t)=\operatorname{Arctg} t \Rightarrow u=x\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$

٥) $f(t)=\ln(1+t) \Rightarrow u=x\ln(1+\frac{y}{x})$

٦) $f(t)=te^t \Rightarrow u=x\times\frac{y}{x}e^{y/x}=ye^{y/x}$

ثابت می شود که جواب عمومی معادلهٔ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$ ، عبارتست از :

$$u=f(x+y)+e^y g(x-y)$$

وجواب عمومی معادلهٔ : $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ چنین است :

$u=f(x+ay)+g(x-ay)$. در هر دو مثال اخیر f و g دو تابع دلخواه هستند (بعداً این دو معادله را حل می کنیم)

معادلات خطی

مهمترین معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی معادلات خطی هستند و از این به بعد ما با حل این معادلات سروکار داریم.

تعریف - اگر یک معادلهٔ دیفرانسیل برحسب تابع ومشتقات آن به صورت یک رابطه خطی ارائه شود به آن یک معادله دیفرانسیل خطی گفته می شود (یعنی تابع وتمام مشتقات با توان یک در معادله ظاهر شوند مثل معادله خط مستقیم که x و y با توان یک ظاهر می شوند. ورود متغیرها به هر شکل در معادله محدودیتی ندارد)

صورت کلی یک معادله خطی رستهٔ یک روی تابع u ومتغیرهای x و y :

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+C(x,y)u=D(x,y) \qquad (٤)$$

درصورتیکه $D(x,y)\equiv 0$ باشد معادله خطی را همگن ویا بدون طرف دوم نامند

و فرم کلی معادلات خطی رستهٔ دوم روی تابع u و دو متغیر x و y چنین است

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+F(x,y)u=G(x,y) \quad (5)$$

در اینجا هم اگر $G(x,y)\equiv 0$ باشد، معادله را خطی همگن و یا بدون طرف دوم نامند

درصورتی که در یک معادلهٔ خطی ضرایب مشتقات و تابع مقادیر ثابتی باشند به آن معادله خطی با ضریب های ثابت گفته می شود.

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=f(x,y)$$ معادله خطی رستهٔ یک با ضریب های ثابت و با طرف دوم

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0$$ معادله خطی رستهٔ یک با ضریب های ثابت و بدون طرف دوم

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu=G(x,y)$$ معادله خطی رستهٔ دوم با ضریب های ثابت و با طرف دوم

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu=0$$ معادله خطی رستهٔ دوم با ضریب های ثابته و بدون طرف دوم.

چهار معادله دیفرانسیل معروف (اسم دار) عبارتند از:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad c>0 \quad (6)$$ معادله انتشار حرارت

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-b\frac{\partial u}{\partial x} \quad (7)$$ معادله انتشار آلودگی در کانال

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8)$$ معادلهٔ موج

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad (9)$$ معادلهٔ پتانسیل یا معادلهٔ لاپلاس

که همگی خطی اند. در معادلات (۶) و (۷) و (۸) متغیر اول یعنی x متغیر مکان و متغیر دوم یعنی t متغیر زمان است. در این معادلات c و b ثابت های مثبت هستند. در این درس بعداً به حل آنها می پردازیم

این دو قضیهٔ بسیار مهم که در معادلات دیفرانسیل خطی معمولی برقرارند در معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی و خطی هم صادق می‌باشند و ما در حل معادلات خطی از آنها استفاده می‌کنیم.

قضیه اول - اگر هر یک از توابع $u=\varphi_1(x,y)$ ، $u=\varphi_2(x,y)$ ، $u=\varphi_3(x,y)$ ، … ، $u=\varphi_n(x,y)$ جوابهای خصوصی یک معادله دیفرانسیل خطی همگن (بدون طرف دوم) باشند، آنگاه ترکیب خطی این توابع یعنی

$$u=\alpha_1\varphi_1(x,y)+\alpha_2\varphi_2(x,y)+\dots+\alpha_n\varphi_n(x,y)$$

نیز جواب این معادله است. توجه، تعداد این توابع می‌توانند نامتناهی باشد.

قضیه دوم: اگر تابع $u_p=g(x,y)$ یک جواب خصوصی یک معادلهٔ خطی غیرهمگن (با طرف دوم) و تابع $u=F(x,y)$ جواب عمومی معادله خطی بدون طرف مربوط به این معادله باشد، آنگاه تابع $u=F(x,y)+g(x,y)$ جواب عمومی معادلهٔ با طرف دوم است.

به این مثال برای کاربرد این قضیه توجه کنید:

مثال جواب عمومی معادلهٔ خطی $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}-u=x^3$ را بدست آورید.

حل: ابتداء جواب عمومی معادله بدون طرف دوم این معادله یعنی معادله $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}-u=0$ را بدست می‌آوریم. قبلاً سراغ این معادله رفتیم و دیدیم که جواب عمومی آن $u=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ است. از طرف دیگر می‌توان نشان داد که تابع $u_p=\frac{x^3}{2}$ یک جواب خصوصی معادلهٔ با طرف دوم $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}-u=x^3$ است از یک $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{3x^2}{2}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ و داریم

$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}-u=x\left(\frac{3x^2}{2}\right)+y(0)-\frac{x^3}{2}=x^3$ پس تابع $u=xf\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^3}{2}$ جواب مسأله است. اینکه توابع $u=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ و $u_p=\frac{x^3}{2}$ چگونه بدست می‌آیند بعداً بطور سیستماتیک به آن می‌پردازیم. در اینجا فقط میخواستیم کاربرد قضیه دوم را نشان دهیم.

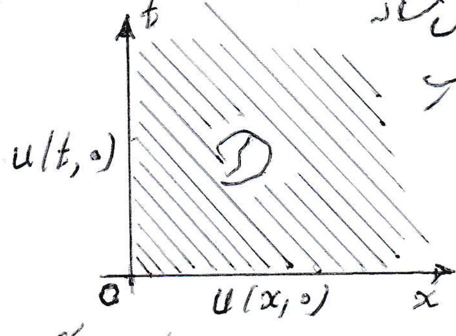
حل معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی

روشهای گوناگونی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی بکار گرفته می‌شود و آنهم بستگی به فرم معادله دارد و بسیاری از اوقات هم باید از روشهای عددی کمک گرفت. در حل معادلات با مشتق‌های جزئی با سه محدودیت مواجه هستیم (i) فرم معادله، (ii) قلمرو حل، (iii) شرایط مرزی و اولیه، که با تغییر هر یک ممکن است حل معادله را با اشکال مواجه نماید. منظور از قلمرو حل دامنهٔ تغییرات متغیرهاست.

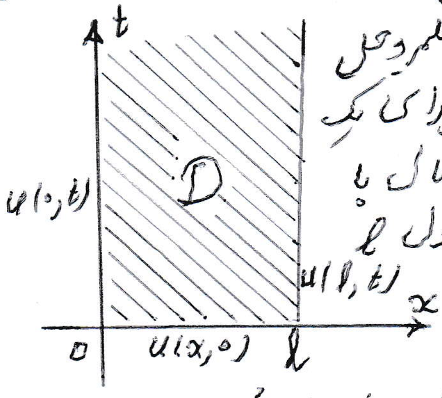
مثلاً در حل معادله انتشار آلودگی در یک کانال

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\frac{\partial u}{\partial x}$$

که c ضریب انتشار و b سرعت آب، t متغیر زمان و x متغیر مکان (فاصله هر نقطه کانال از ابتدای کانال)، اگر طول کانال محدود و برابر l باشد، قلمرو حل $l > x > 0$ و $0 < t$، و اگر طول کانال نامحدود (و یا طولانی) باشد، قلمرو حل $0 < x$ و $0 < t$ می‌باشد که معمولاً به صورت ناحیه‌ای از صفحه مختصات xot نشان داده می‌شود.



قلمرو حل مسأله برای یک کانال طولانی



قلمرو حل مسأله برای یک کانال با طول l

منظور از شرایط مرزی و اولیه عبارتست از مقدار تابع (میزان آلودگی) روی مرز قلمرو حل، مثلاً برای $D: 0<x<l$ و $0<t$ شرایط مرزی مسأله که باید داده باشند عبارتند از: $u(x,0)$ ، $u(l,t)$ ، $u(0,t)$

و برای قلمرو حل $0<t$ و $0<x$ ، شرایط مرزی: $u(t,0)$ و $u(x,0)$ (شرط مرزی مربوط به زمان $t = 0$ را شرط اولیه نامند) بعداً خواهیم دید که روش حل این دو مسأله از یک مرحله به بعد کاملاً متفاوت‌اند.

در مورد تعریف شرایط مرزی و تأثیر آن در حل مسألهٔ انتشار و موج و لاپلاس بعداً

بطور دقیق توضیح داده می‌شود. از اینجا به بعد می‌پردازیم به حل معادلات.

۱- حل معادلات ساده:

برخی از معادلات آن چنان ساده هستند که با یک بار یا دو بار انتگرال گیری از معادله می‌توان به جواب عمومی معادله رسید. مثال ها:

۱) حل معادله $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + e^y x^2$. حل: از طرفین این معادله روی متغیر x (با ثابت نگه داشتن y) انتگرال می‌گیریم

$$\Rightarrow u=\int (2xy+e^y x^2)\,dx = yx^2 + e^y \frac{x^3}{3} + c$$

و این همه جواب معادله نیست زیرا اگر از طرفین توابع

$$\Rightarrow u = yx^2+\frac{x^3}{3}e^y + \cos y + c \quad , \quad u = yx^2+\frac{x^3}{3}e^y + y^2+y+1$$

$$u = yx^2+\frac{x^3}{3}e^y+\sqrt{y^2+1} \quad , \quad u = yx^2 + \frac{x^3}{3}e^y + \operatorname{Arctg} y + c$$

هم برحسب x مشتق جزئی بگیریم به معادلهٔ بالا می‌رسیم. لذا می‌توان در هنگام انتگرال گیری به تابع $yx^2+\frac{x^3}{3}e^y$ هر تابع دلخواه صرفاً روی متغیر y را اضافه کرد. پس جواب عمومی معادله چنین است:

$u = yx^2+\frac{x^3}{3}e^y + \varphi(y)$ که $\varphi(y)$ تابعی است دلخواه از y.

و بطور کلی اگر برای رسیدن به جواب معادله لازم بود که از آن نسبت به یکی از متغیرها انتگرال بگیریم ثابت انتگرال گیری را تابعی دلخواه از متغیر دیگر می‌گیریم.

۲) حل معادلهٔ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = x\cos y + ye^x + 4$$

؛ حل:

ابتدا می‌نویسیم

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x} = x\cos y + ye^x+4$$

و سپس روی متغیر x انتگرال می‌گیریم (با y ثابت)

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{2}\cos y + ye^x + 4x + \varphi(y)$$

و حال روی متغیر y (با x ثابت) انتگرال می‌گیریم

$$\Rightarrow u = \frac{x^2}{2}\sin y + \frac{y^2}{2}e^x + 4xy + \int\varphi(y)\,dy + g(x)$$

ثابت انتگرال گیری

از آنجائی که $\varphi(y)$ تابعی است دلخواه از y ، لذا $\int\varphi(y)$ هم تابعی دلخواه از y می‌شود که آن را به $f(y)$ نشان می‌دهیم. پس جواب عمومی معادله چنین است:

$$u(x,y)=\frac{x^2}{2}\ln y+\frac{y^2}{2}e^x+4xy+f(y)+g(x)$$

که f و g دو تابع دلخواه هستند.

۳) حل معادله: $\frac{\partial u}{\partial y}=2xyu$ حل: با انتگرال از این به جائی نمی‌رسیم ولی اگر معادله را به صورت $\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{u}=2xy$ بنویسیم می‌شود به جواب رسید زیرا:

$$\frac{\partial(\ln u)}{\partial y}=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{u} \Rightarrow \text{پس:} \Rightarrow \frac{\partial(\ln u)}{\partial y}=2xy$$

از طرفین معادله روی متغیر y انتگرال می‌گیریم:

$$\Rightarrow \ln u=\int 2xy\,dy=xy^2+\underbrace{\varphi(x)}_{\text{ثابت انتگرال‌گیری}}$$

جواب عمومی:

$$\Rightarrow u=e^{xy^2+\varphi(x)}=e^{\varphi(x)}e^{xy^2}\Rightarrow \underline{u=g(x)e^{xy^2}}$$

که $g(x)$ تابعی دلخواه از x است. (توجه $e^{\varphi(x)}=g(x)$)

حل کنید: *۱) $y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=x$

راهنمائی می‌نویسیم: $\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}+u\right)=x$ و جواب مسئله:

$$u(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{y}f(x)+g(y)$$

۴- حل معادلاتی که در آنها مشتقات جزئی فقط روی یکی از متغیرها در معادله ظاهر می‌شود:

ابتدا معرفی چندتا از این گونه معادلات:

در این معادلات مشتق‌های جزئی u برحسب y در معادله ظاهر نمی‌شود: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u=e^{x+y}$ ، $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial x}=$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial y}=x^2\cos y$ و $\frac{\partial u}{\partial y}+u=e^{x+y}$, $u(x,0)=e^x$

در این معادلات هم مشتق های جزئی u نسبت به x در معادله ظاهر نمی شود.

در معادله آخری خواسته شده آن جواب خصوصی معادله را پیدا کنیم که در شرط $u(x,0)=e^x$ (یعنی به ازای $y=0$ ، $u=e^x$) صدق کند.

حال روش حل این گونه معادلات:

اگر معادله فقط شامل $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ و ... باشد (یعنی در آن مشتق های u برحسب y ظاهر نشود) آن را به مثابه یک معادله دیفرانسیل معمولی با تابع u و متغیر x (y به عنوان یک پارامتر ثابت) حل می کنیم و در انتهای حل ثابت و یا ثابت های دلخواه در جواب عمومی معادله را به تابع و یا توابع دلخواه از y تبدیل می کنیم. مشابه همین روش را وقتی که مشتق های u برحسب y فقط در معادله ظاهر می شود حل می کنیم.

حال چهار معادله بالا را حل می کنیم

مثال ۱- حل معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial x}=0$

حل: این معادله را مانند یک معادله دیفرانسیل معمولی با تابع u و متغیر x حل می کنیم

$$\frac{d^2 u}{dx^2}-\frac{du}{dx}=0$$

این یک معادله خطی و با ضریب های ثابت است و معادله مفسر آن $m^2-m=0$ یا $m(m-1)=0$ پس $m_1=0$ و $m_2=1$

و جواب عمومی این معادله:

$$u=c_1e^{0\times x}+c_2e^{1\times x}=c_1+c_2e^x$$

حال $c_1\to f(y)$ و $c_2\to g(y)$ لذا جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتق های جزئی:

$$u(x,y)=f(y)+g(y)e^x$$

مثال ۲- حل معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u=e^{x+y}$

حل: ابتدا معادله دیفرانسیل معمولی: $\frac{d^2 u}{dx^2}+u=e^{x+y}$ از یک تابع u و متغیر x و y به عنوان یک ثابت، حل می کنیم.

این یک معادله خطی با ضریب های ثابت و با طرف دوم است که ابتداء جواب عمومی معادله همگن (بدون طرف دوم) آن را یعنی $\frac{d^2U}{dx^2}+U=0$ بدست می آوریم. معادله مفسر $m^2+1=0 \Leftarrow m^2=-1$ و $m=\begin{cases}0+1\times i\\0-1\times i\end{cases}$
($\alpha=0$ و $\beta=1$) لذا:

$$U=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)=C_1\cos x+C_2\sin x$$

و سپس یک جواب خصوصی معادلهٔ با طرف دوم را بدست می آوریم. با توجه به آنکه طرف دوم معادله $e^{x+y}=e^y\times e^x$ (توجه e^y به عنوان یک ضریب ثابت درنظر می گیریم) این جواب خصوصی را به صورت $U_p=Ae^x$ درنظر می گیریم و با بردن آن در معادله A را محاسبه می کنیم

$$\frac{d^2U}{dx^2}+U=e^y\times e^x\Rightarrow Ae^x+Ae^x=e^y\times e^x\Rightarrow 2A=e^y$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}e^y\Rightarrow U_p=\frac{1}{2}e^y\times e^x=\frac{1}{2}e^{x+y}$$

پس جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل معمولی:

$$U=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{e^{x+y}}{2}$$

و جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل با مشتق جزئی

$$U=f(y)\cos x+g(y)\sin x+\frac{1}{2}e^{x+y}$$

مثال ۳ - حل معادلهٔ $\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+x\frac{\partial U}{\partial y}=x^2\cos y$ حل این معادله را به عنوان یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی با تابع U و متغیر y و x ثابت حل می کنیم $\frac{d^2U}{dy^2}+x\frac{dU}{dy}=x^2\cos y$. و همانند مثال ۲ - این یک معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن (با طرف دوم) و با ضریب های ثابت است و ابتداء جواب عمومی معادله همگن نسبت تنها ظرف آن یعنی $\frac{d^2U}{dy^2}+x\frac{dU}{dy}=0$ را بدست می آوریم.

معادله مفسر $m^2+xm=0 \Leftarrow m(m+x)=0 \Leftarrow m_1=0$ و $m_2=-x$
و با فرض $x\neq 0$:

$$U=C_1e^{0\times y}+C_2e^{-xy}=C_1+C_2e^{-xy}$$

و سپس یک جواب خصوصی معادله‌ی با طرف دوم را پیدا کرده و با تابع بالا جمع می‌کنیم

با توجه به طرف دوم معادله روکه شامل y این جواب خصوصی را به صورت :

$u_p = A\cos y + B\sin y$ در نظر می‌گیریم و در معادله می‌بریم :

$$\frac{d^2u}{dy^2} + x\frac{du}{dy} = \underbrace{-A\cos y - B\sin y}_{\frac{d^2u}{dy^2}} + x(\underbrace{-A\sin y + B\cos y}_{\frac{du}{dy}}) = x^2\cos y$$

ضریب های $\cos y$ و $\sin y$ را در طرفین معادله برابر هم قرار می‌دهیم

ضریب $\cos y$: $-A + xB = x^2 \quad \Rightarrow -A - x^2A = x^2 \Rightarrow A = -\frac{x^2}{x^2+1}$

ضریب $\sin y$: $-B - xA = 0 \Rightarrow B = -xA \qquad B = \frac{x^3}{x^2+1}$

$$u_p = -\frac{x^2}{x^2+1}\cos y + \frac{x^3}{x^2+1}\sin y$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل معمولی :

$$u = c_1 + c_2 e^{-xy} + \frac{x^2}{x^2+1}(-\cos y + x\sin y)$$

و با تبدیل $c_1 \to f(x)$ و $c_2 \to g(x)$ جواب مسئله این چنین می‌شود

$$u(x,y) = f(x) + g(x)e^{-xy} + \frac{x^2}{x^2+1}(x\sin y - \cos y)$$

مثال ۴ - آن جواب خصوصی معادله‌ی $\frac{\partial u}{\partial y} + u = e^{x+y}$ که در شرط مرزی $u(x,0) = e^x$ صدق می‌کند بدست آورید. حل :

ابتدا جواب عمومی معادله را پیدا می‌کنیم. این معادله را به مشابه یک معادله دیفرانسیل معمولی رسته‌ی یک روی تابع u و متغیر y (با x ثابت) حل می‌کنیم ولی این یک معادله خطی رسته‌ی یک است که فرمول حل آن در صفحه ۳۶ فرمول (۵) (بالای صفحه) ارائه شده و در اینجا آن را روی تابع u و متغیر y بازنویسی می‌کنیم :

$$u' + P(y)u = Q(y) \Rightarrow u = e^{-\int P(y)dy}\left(\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy + c\right)$$

در اینجا : $P(y) = 1$ (ضریب u) و $Q(y) = e^{x+y}$ (طرف دوم معادله) لذا :

$$\Rightarrow u = e^{-\int 1\times dy}\left(\int e^{x+y}\cdot e^{\int 1\times dy}dy + c\right) = e^{-y}\left(\int e^{x+y}\times e^{y}dy + c\right)$$

$$= e^{-y}\left(\int e^{2y+x}dy + c\right) = e^{-y}\left(\frac{1}{2}e^{2y+x} + c\right) = \frac{1}{2}e^{x+y} + ce^{-y}$$

وسپس : $C \Rightarrow f(x)$ ($f(x)$ یک تابع دلخواه از x)

جواب عمومی معادله اصلی : $u(x,y)=\frac{1}{2}e^{x+y}+f(x)e^{-y}$:

حال تابع $f(x)$ را چنان تعیین می‌کنیم که جواب مسأله در شرط $u(x,y=0)=e^{x}$ صدق کند حال در جواب عمومی مسأله $y=0$ را اعمال می‌کنیم :

$$u(x,0)=\frac{1}{2}e^{x+0}+f(x)e^{0}=\frac{1}{2}e^{x}+f(x)=e^{x}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}e^{x}$$

لذا جواب خصوصی مورد نظر

$$u(x,y)=\frac{1}{2}e^{x+y}+\frac{1}{2}e^{x}\cdot e^{-y}=\frac{1}{2}(e^{x+y}+e^{x-y})$$

براساس روشی برای حل ۴ معادله بالا بردیم معادلات زیر را حل کنید :

۲) $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+4U=xy$ ۳) $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+x^2U=0$

۴) $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2y\frac{\partial U}{\partial x}=\cos x$ ۵) $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+U=e^{xy}$

جواب ۵)

$$u(x,y)=f(x)\cos y+g(x)\sin y+\frac{e^{xy}}{x^2+1}$$

۶) $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+x\frac{\partial U}{\partial y}=0$ *۷) $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2y\frac{\partial U}{\partial x}=4xy$

۸) $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-2y\frac{\partial U}{\partial x}=\sin x$ *۹) $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+(x^2+1)\frac{\partial u}{\partial y}+x^2U=x^2$

راهنمائی برای مسأله (۷) :

یک جواب خصوصی معادله با طرف دوم را به صورت $u_p=Ax^2+Bx$: درنظر می‌گیریم .

۳ - روش تشکیل معادلهٔ مفسر

قبل از آنکه به توضیح این روش بپردازم، دو نکته حاشیه‌ای که در این روش آنها را رعایت می‌کنم، ذکر می‌کنم.

نکته اول. بسیاری از توابع آشنا تحت شرایطی می‌توان براساس فرمول:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots$$

به سری مک لوران بسط داد. مثلاً:

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots$$

و اگر داشته باشیم:

$$f(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\cdots$$

براساس فرمول بالا ضریب‌های A_0 و A_1 و A_2 و ... وابسته به تابع $f(x)$ هستند و از روی تابع $f(x)$ محاسبه می‌شوند. حال اگر A_0 و A_1 و A_2 و A_3 و ... دلخواه باشند، آنگاه تابع $f(x)$ هم دلخواه خواهد بود. و مثلاً اگر داشته باشیم

$$U=A_0+A_1(x+2y)+A_2(x+2y)^2+A_3(x+2y)^3+\cdots$$

و ضریب‌های A_0 و A_1 و A_2 و A_3 و ... دلخواه باشند، می‌توانیم بگوییم $U=f(x+2y)$ که f یک تابع دلخواه است. حتی فراتر از این اگر:

$$U=A_0+A_1(e^{x+2y})^1+A_2(e^{x+2y})^2+A_3(e^{x+2y})^3+A_4(e^{x+2y})^4+\cdots$$

که A_0 و A_1 و A_2 و A_3 و ... دلخواه باشند می‌نویسیم:

$u(x,y)=f(e^{x+2y})=g(x+2y)$ که f و درنتیجه g تابعی دلخواه از $x+2y$ است.

نکته دوم - دیدیم که برای حل معادله دیفرانسیل معمولی خطی و با ضریب‌های ثابت، $y''-3y'+2y=0$، معادله مفسر $m^2-3m+2=0$ را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آن را حساب می‌کنیم و ... سؤال: این معادلهٔ مفسر چگونه بدست می‌آید؟

جواب: ابتدا جوابهای خصوصی معادله را که به فرم تابع نمائی $y=e^{mx}$ هستند، بدست می آوریم، به عبارت دیگر عدد m را چنان تعیین می کنیم که این تابع در معادله بالا صدق کند. با بردن این تابع در معادله:

$$\Rightarrow y''-3y'+2y=m^2e^{mx}-3me^{mx}+2e^{mx}=(m^2-3m+2)e^{mx}=0$$

پس باید $m^2-3m+2=0$ باشد، جوابهای این معادله $m=1$ و $m=2$ است. پس توابع $y=e^{x}$ و $y=e^{2x}$ دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل هستند و ترکیب خطی آنها با ثابت های دلخواه $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$ جواب عمومی معادله می باشد.

حال برمی گردیم که حل معادلات دیفرانسیل با مشتق های جزئی با بکارگیری معادله مشخصه. این روش برای حل معادلات خطی همگن و با ضریب های ثابت بکار گرفته می شود مانند این معادلات:

$$\Rightarrow 1)\ 2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad 2)\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-2u=0$$

$$3)\ 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad 4)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$5)\ 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

همانند حل معادلات دیفرانسیل معمولی ابتدا تمام جوابهای خصوصی معادله را به فرم توابع نمائی هستند پیدا می کنیم ولی اینجا بجای متغیر x، با دو متغیر x و y مواجه هستیم. بنابراین تابع نمائی را که به عنوان خصوصی در معادله می بریم به صورت: $y=e^{mx+ny}$ یا $y=e^{mx}\times e^{ny}$ در نظر می گیریم و با بردن آن در معادله، یک معادله روی دو مجهول m و n بدست می آوریم که به آن معادله مشخصه می گوئیم. بقیه مسایل تا رسیدن به جواب عمومی معادله روی مثال ها توضیح داده می شود.

مثال ۱) حل معادله: $2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$ حل - ابتدا تمام جوابهای خصوصی معادله را که به فرم $u=e^{mx+ny}$ هستند بدست می آوریم. با بردن این تابع در معادله:

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=me^{mx+ny} \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=ne^{mx+ny}$$

$$\Rightarrow 2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=2m\,e^{mx+ny}-n\,e^{mx+ny}=(2m-n)e^{mx+ny}=0$$

پس باید $2m-n=0$ و این معادله مفسر (مربوط به معادله دیفرانسیل) نامیده می‌شود.
و این یک معادله است با دو مجهول، لذا بی‌شمار جواب (m,n) بدست می‌دهد
بطوریکه $n=2m$، یعنی اگر $n=2m$ باشد، تابع $u=e^{mx+ny}$
یک جواب خصوصی معادله است. به عبارت دیگر تمام توابع:
$u=e^{mx+2my}=e^{m(x+2y)}$ که m هر عدد دلخواه باشد، جوابهای
خصوصی معادله هستند. از جمله $m=0,1,2,3,\dots$، از ترکیب خطی
این توابع با ثابت‌های دلخواه A_0، A_1 و A_2 و ...، (براساس قضیه ۱ صفحه)
به جواب عمومی معادله می‌رسیم:

$$u(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}A_m e^{m(x+2y)}=\sum_{m=0}^{\infty}A_m\left(e^{x+2y}\right)^m=\underline{f(x+2y)}$$

که f یک تابع دلخواه است.

مثال ۲) جواب عمومی معادله $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-2u=0$ را بدست آورید.
تابع $u=e^{mx+ny}$ را به عنوان جواب خصوصی در معادله می‌بریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-2u=me^{mx+ny}+ne^{mx+ny}-2e^{mx+ny}$$
$$=(m+n-2)e^{mx+ny}=0\Rightarrow \underbrace{m+n-2=0}_{\text{معادله مفسر}}$$

$$\Rightarrow n=2-m$$

و جوابهای خصوصی معادله:

$$u=e^{mx+ny}=e^{mx+(2-m)y}=e^{2y}\times e^{m(x-y)}$$

و جواب عمومی معادله:

$$\Rightarrow u(x,y)=\sum_m A_m e^{2y}e^{m(x-y)}=e^{2y}\sum_m A_m\left(e^{x-y}\right)^m$$
$$=\underline{e^{2y}f(x-y)}$$

(نکته مهم: جمله e^{2y} را باید جدا ساخت تا بتوان بقیه را به صورت $(\dots)^m$ نوشت.)
که f تابعی است دلخواه

مثال ۳) حل معادله: $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ حل: تابع $u=e^{mx+ny}$ را به عنوان جواب خصوصی در معادله می‌بریم:

$$\Rightarrow 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4m^2e^{mx+ny}-n^2e^{mx+ny}=(4m^2-n^2)e^{mx+ny}\equiv 0$$

لذا $4m^2-n^2=0$ معادله مفسر این مسأله است و داریم $n^2=4m^2$

لذا $n=\pm 2m$ در اینجا دو سری جوابهای خصوصی به فرم زیر:

$$\Rightarrow\begin{cases} u=e^{mx+ny}=e^{mx+2my}=e^{m(x+2y)} \\ u=e^{mx+ny}=e^{mx-2my}=e^{m(x-2y)} \end{cases}$$

ترکیب خطی این توابع با ثابت‌های دلخواه را در دو جمع جداگانه می‌نویسیم

$$u(x,y)=\sum_m A_m\left(e^{x+2y}\right)^m+\sum_m B_m\left(e^{x-2y}\right)^m$$

یعنی:

$$u(x,y)=f(x+2y)+g(x-2y)$$

که f و g دو تابع دلخواه می‌باشند. چنین انتظاری هم می‌رفت، زیرا جواب عمومی معادله رسته دو وابسته به دو تابع دلخواه است.

مثال ۴) حل معادله

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$ حل:

تابع $u=e^{mx+ny}$ را در معادله می‌بریم:

$$\Rightarrow m^2e^{mx+ny}-n^2e^{mx+ny}=me^{mx+ny}-ne^{mx+ny}$$

$$\Rightarrow (m^2-n^2)e^{mx+ny}=(m-n)e^{mx+ny}\Rightarrow \underbrace{m^2-n^2=m-n}_{\text{معادله مفسر}}$$

همه عناصر معادله را به یک طرف منتقل می‌کنیم

$$\Rightarrow (m-n)(m+n)-(m-n)=0$$

$$(m-n)(m+n-1)=0$$

در اینجا هم دو سری جواب بدست می‌آید.

$$(i)\ m-n=0\Rightarrow n=m$$

$$(ii)\ m+n-1=0\Rightarrow n=1-m$$

و جوابهای خصوصی معادله:

$$(i)\ n=m \Rightarrow U=e^{mx+ny}=e^{mx+my}=e^{m(x+y)}$$

$$(ii)\ n=1-m \Rightarrow U=e^{mx+(1-m)y}=e^{y+m(x-y)}=e^{y}\times e^{m(x-y)}$$

و ترکیب خطی این توابع با ثابت آی دلخواه:

$$u(x,y)=\sum_m A_m e^{m(x+y)}+\sum_m B_m e^{y}\cdot e^{m(x-y)}$$

$$=\sum_m A_m (e^{x+y})^m + e^{y}\sum_m B_m (e^{x-y})^m = f(x+y)+e^{y}g(x-y)$$

که f و g دو تابع دلخواه هستند

مثال (۵) حل معادله

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$$ حل:

تابع $U=e^{mx+ny}$ را در معادله می‌بریم:

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=4m^2e^{mx+ny}-4mn\,e^{mx+ny}+n^2e^{mx+ny}$$

$$=(4m^2-4mn+n^2)e^{mx+ny}=0$$

لذا:

معادله مفسر $4m^2-4mn+n^2=0$

$$\Rightarrow 4m^2-4mn+n^2=(2m-n)^2=0 \Rightarrow 2m-n=0 \Rightarrow n=2m$$

توجه کنید در اینجا معادله مفسر دارای ریشه مضاعف (دو ریشه برابر) $n=2m$ است و دقیقاً مانند معادلات دیفرانسیل معمولی علاوه بر تابع $U=e^{mx+ny}=e^{mx+2my}$، تابع $U=xe^{mx+2my}$ هم جوابهای معادله هستند. و جواب عمومی معادله به این صورت نوشته می‌شود.

$$U=\sum_m A_m (e^{x+2y})^m + x\sum_m B_m (e^{x+2y})^m = f(x+2y)+xg(x+2y)$$

که f و g دو تابع دلخواه هستند.

دقت کنید که جواب عمومی معادله را به این فرم هم نوشت:

$$u(x,y)=f(x+2y)+y\,g(x+2y)$$

فکر کنید چگونه می‌توان نشان داد که این دو جواب معادل اند؟

حل معادلات خطی با ضریب های ثابت و با طرف دوم

معادلاتی که در بالا حل کردیم معادلات خطی همگن (بدون طرف دوم) بودند. در اینجا به حل معادلاتی می پردازیم که غیرهمگن (با طرف دوم) باشند مانند این معادلات:

۶) $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-2u=x+y$ ۷) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\cos x$

۸) $2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=xy+2x$ ۹) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2$

برای حل این گونه معادلات ابتدا جواب عمومی معادله بدون درنظر گرفتن طرف دوم را بدست می آوریم و سپس یک جواب خصوصی معادله با طرف دوم را حساب کرده و به آن اضافه می کنیم (طبق قضیه دوم صفحه (۲)) این جواب خصوصی را می توان با توجه به فرم طرف دوم یک تابع مناسب با ضریب های نامعین درنظر گرفت و در معادله برد و ضریب های مجهول را حساب کرد و یا اینکه این جواب خصوصی مقید به یک متغیر گرفت و با انتگرال گیری آن را پیدا کرد و یا آنقدر مسئله ساده باشد که بتوان آن را حدس زد.

حالا به عنوان مثال ۴ معادله بالا را حل می کنیم - جواب عمومی معادله بدون طرف دوم هر یک از آنها بدست آمده است (*). بنابراین آنها را تکرار نمی کنیم و به توضیح درمورد یافتن یک جواب خصوصی معادله می پردازیم

مثال ۶):

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-2u=x+y$$

با توجه به طرف دوم معادله یک جواب خصوصی معادله را به فرم: $u_p=Ax+By+C$ درنظر می گیریم با بردن این تابع در معادله:

$$\Rightarrow A+B-2(Ax+By+C)=x+y\Rightarrow\begin{cases} x \text{ ضریب } & -2A=1 \\ y \text{ ضریب } & -2B=1 \\ \text{ثابت} & A+B-2C=0 \end{cases}\Rightarrow \begin{array}{l} A=-\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=-1\end{array}$$

$$\Rightarrow u_p=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y-1\Rightarrow u(x,y)=e^{2y}f(x-y)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+1\right)$$

(*) در مثال های قبلی

مثال ۷) حل معادلهٔ : $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\cos x$ حل: با توجه به اینکه طرف دوم تابعی از x است، یک جواب خصوصی معادله را که فقط وابسته به x است پیدا می‌کنیم. برای این تابع $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{d^2 u}{dx^2}$ پس :

$$\text{معادله} \Rightarrow 4\frac{d^2 u}{dx^2}=\cos x \Longrightarrow 4\frac{du}{dx}=\sin x \Rightarrow 4u_p=-\cos x$$

$$\Rightarrow u_p=-\frac{1}{4}\cos x \Rightarrow u(x,y)=f(x+2y)+g(x-2y)-\frac{1}{4}\cos x$$

مثال ۸) $2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=xy$ حل :

قبلاً حل کردیم : جواب عمومی معادلهٔ

$$u=f(x+2y) \Leftarrow 2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

یک جواب خصوصی معادله بالا را به صورت $u_p=Ax^2y+Bx^3$ درنظر می‌گیریم

با بردن این تابع در معادله :

$$2(2Axy+3Bx^2)-Ax^2=xy$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ضریب } xy & 4A=1 \\ x^2 \ \text{〃} & 6B-A=0 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{4},\ B=\frac{1}{24} \Rightarrow u_p=\frac{1}{4}x^2y+\frac{x^3}{24}$$

و جواب مسأله :

$$u(x,y)=f(x+2y)+\frac{x^2y}{4}+\frac{x^3}{24}$$

مثال ۹)

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2$$

جواب خصوصی این معادله را می‌توان یکی از توابع $u_p=-\frac{1}{2}xy$ ، $u_p=y^2$ ، $u_p=\frac{x^2}{4}$ انتخاب کرد

ممکن است بخواهیم علاوه بر تعیین جواب عمومی معادله یک جواب خصوصی آن را که در شرط مرزی خاصی صدق کند بدست آوریم . در این مورد به این دو مثال توجه کنید .

مثال ۱۰) آن جواب خصوصی معادله $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-2u=0$ که در شرط $u(x,0)=e^x$

حل - ابتداء جواب عمومی این معادله را پیدا می‌کنیم که در مثال (۳) بدست آوردیم $u(x,y)=e^{2y}f(x-y)$ ، حال شرط $u(x,0)=e^{x}$ (به ازای $y=0$) را اعمال می‌کنیم تا تابع f مشخص شود

$$\Rightarrow u(x,0)=e^{0}f(x-0)=e^{x}$$

$$\Rightarrow \underline{f(x)=e^{x}} \quad \text{و} \quad \Rightarrow u(x,y)=e^{2y}f(x-y)=e^{2y}e^{x-y}=e^{x+y}$$

پس جواب این مسأله تابع $u(x,y)=e^{x+y}$ است.

مثال (۱۱)

آن جواب خصوصی معادلهٔ $2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=xy$ پیدا کنید که در شرط $u(0,y)=y^3$ صدق کند. حل: طبق مثال (۸) جواب عمومی این معادله تابع:
$u(x,y)=f(x+2y)+\frac{x^2y}{4}+\frac{x^3}{24}$ است. حال شرط $u(0,y)=y^3$ $(x=0)$ را روی این جواب اعمال می‌کنیم:

$$\Rightarrow u(0,y)=f(2y)+0+0=y^3$$

پس $f(2y)=y^3$ ⇐ با تبدیل $2y\to y$ ؛ $\underline{f(y)=\left(\frac{y}{2}\right)^3=\frac{y^3}{8}}$

و جواب خصوصی معادله با اعمال این تابع f:

$$u(x,y)=f(x+2y)+\frac{x^2y}{4}+\frac{x^3}{24}=\frac{(x+2y)^3}{8}+\frac{x^2y}{4}+\frac{x^3}{24}$$

یا:

$$\underline{u(x,y)=\frac{1}{6}x^3+x^2y+\frac{3}{2}xy^2+y^3}$$

می‌توان چک کرد که این جوابی که بدست آوردیم صحیح است و در عملیات مرتکب اشتباه نشده‌ایم. کافیست که (ز) نشان داد که این تابع در معادله صدق می‌کند

(زز) $2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=2\left(\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{3}{2}y^2\right)-(x^2+3xy+3y^2)=xy$ این تابع در شرط $u(0,y)=y^3$ صدق می‌کند که این هم واضح است.

این مطلب را از این نظر نوشتم ، برای مسائلی که شما باید حل کنید ، در آخر هر جوابی که بدست آورده اید مثل بالا می‌توانید درستی آن را چک کنید.

مسائل برای حل:

10) $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=u$ 11) $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=u+x+y$

12) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y$ *13) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ $\left(u=e^{mx+ny};\ m=2n,\ m=n\right)$

* ۱۴) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ ۱۵) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4$

۱۶) $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = u \,,\; u(x,0) = e^{x} \sin x$

* ۱۷) $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = u + y \,,\; u(x,0) = x + 1$

۱۸) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2u \,,\; u(x,0) = e^{x} \cos x$

* ۱۹) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \,,\; u(0,y) = \sin y \,,\; u(x,0) = \sin x$

۲۰) $2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0 \,,\; u(x,0) = e^{-x}$

پیوست I:

۱- راهنمائی مسئله (۱۶) صفحه (۱):

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^{\alpha})^{\alpha}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma(\alpha)} \qquad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \,,\; \alpha - \frac{1}{\alpha} = 1$$

۲- راهنمائی مسئله (۷) صفحه (۹): $Y(s) = \mathcal{L}(y(t)) = \frac{s-2}{s^2}$

پیوست II: در قسمت آخر درس این مسائل را حل می‌کنیم

۱) مسئله انتشار حرارت: x محدود

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0<x<l \,,\; t>0 \\ u(0,t)=0 \,,\; u(l,t)=0 \,,\; u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

و تعمیم آن

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0<x<l \,,\; t>0 \\ u(0,t)=a \,,\; u(l,t)=b \end{cases}$$

۲) معادله انتشار آلودگی:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\frac{\partial u}{\partial x} & 0<x<l \,,\; t>0 \\ u(0,t)=0 \,,\; u(l,t)=0 \,,\; u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

۳) حل معادلات بالا وقتی که بجای $0<x<l$، $x>0$ داشته باشیم $x \in (0,\infty)$

معادلات لاپلاس و موج هم حذف.

حل معادلهٔ موج در نیم صفحه و ربع صفحه

۱- حل معادلهٔ موج همگن در نیم صفحهٔ: $-\infty < x < \infty$ و $t > 0$

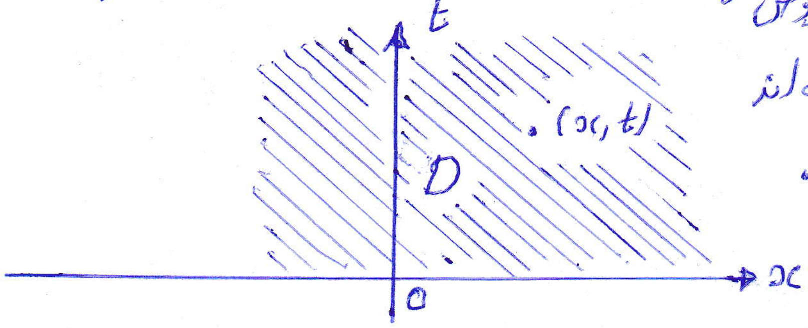
(۱) معادله: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(۲) ناحیهٔ حل: $D: \begin{array}{l} -\infty < x < \infty \\ t > 0 \end{array}$

(۳) شرایط اولیهٔ مسأله:

$u(x,0) = f(x)$ و $u'_t(x,0) = g(x)$

که f و g دو تابع مفروض اند که در $\mathbb{R}$ تعریف شده‌اند و c عددی است مثبت و معلوم.



برای حل این از روش تشکیل معادلهٔ مفسر استفاده می‌کنیم که ابتدا جوابهای خصوصی معادله را که به فرم $u = e^{mx+nt}$ می‌باشند، پیدا می‌کنیم.

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow n^2 e^{mx+nt} = c^2 m^2 e^{mx+nt}$$

$$\Rightarrow n^2 = c^2 m^2 \Rightarrow \begin{cases} n = cm \\ n = -cm \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} u = e^{mx+mct} = e^{m(x+ct)} \\ u = e^{mx-mct} = e^{m(x-ct)} \end{array}$$

و جواب عمومی معادله:

$$u(x,t) = \sum_m A_m (e^{x+ct})^m + \sum_m B_m (e^{x-ct})^m$$

یعنی

$$\underline{u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)} \quad (*)$$

حال شرایط اولیهٔ مسأله را روی این تابع اعمال می‌کنیم تا توابع F و G، برحسب توابع داده شده f و g بدست آید.

(i) $u(x,0) = f(x)$

$$\Rightarrow t = 0: \ u(x,0) = F(x) + G(x) = f(x) \Rightarrow \underline{F(x) + G(x) = f(x)} \ (\alpha)$$

$(ii) \Rightarrow u'_t(x,0) = g(x)$

$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct) \Rightarrow u'_t(x,t) = cF'(x+ct) - cG'(x-ct)$

$u'_t(x,0) = cF'(x) - cG'(x) = g(x) \Rightarrow F'(x) - G'(x) = \frac{1}{c} g(x)$

$\Rightarrow \underline{F(x) - G(x) = \frac{1}{c}\int_\alpha^x g(\tau)\,d\tau} \quad (\beta)$

که α ثابتی است دلخواه .

(یک توضیح ساده برای معادله (β) : اگر: $y'(x) = 2x^2 - 4x + 1$

آنگاه: $y(x) = \int (2x^2 - 4x + 1)\,dx + C = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + x + C$

و می‌توان نوشت :

$$y(x) = \int_\alpha^x (2z^2 - 4z + 1)\,dz = \frac{2}{3}z^3 - 2z^2 + z \Big|_\alpha^x$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + x \underbrace{-\left(\frac{2}{3}\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha\right)}_{=C} \;)$$

از حل دستگاه معادلات (α) و (β) :

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = f(x) \\ F(x) - G(x) = \frac{1}{c}\int_\alpha^x g(\tau)\,d\tau \end{cases}$$

نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + \frac{1}{c}\int_\alpha^x g(\tau)\,d\tau\right) \\ G(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - \frac{1}{c}\int_\alpha^x g(\tau)\,d\tau\right) \end{cases}$$

و لذا بنابراین :

$$\begin{cases} F(x+ct) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + \frac{1}{c}\int_\alpha^{x+ct} g(\tau)\,d\tau\right) \\ G(x-ct) = \frac{1}{2}\left(f(x-ct) - \frac{1}{c}\int_\alpha^{x-ct} g(\tau)\,d\tau\right) \end{cases}$$

و با بردن این توابع در جواب $(*)$ یعنی :

$$U(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

بدست می‌آوریم :

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(f(x+ct)+\frac{1}{c}\int_{\alpha}^{x+ct} g(\tau)\,d\tau\right)+\frac{1}{2}\left(f(x-ct)-\frac{1}{c}\int_{\alpha}^{x-ct} g(\tau)\,d\tau\right) \quad (3)$$

$$=\frac{1}{2}\left(f(x+ct)+f(x-ct)\right)+\frac{1}{2c}\left[\int_{\alpha}^{x+ct} g(\tau)\,d\tau-\int_{\alpha}^{x-ct} g(\tau)\,d\tau\right]$$

و به این ترتیب جواب معادله موج به صورت فرمول زیر بدست می آید که به فرمول دالامبر معروف است :

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(f(x+ct)+f(x-ct)\right)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)\,d\tau \quad (1)$$

در حالت خاصی که $u'_t(x,0)=g(x)=0$ باشد داریم :

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(f(x+ct)+f(x-ct)\right) \quad (2)$$

مثال (1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ; \quad -\infty<x<\infty \ ,\ t>0 \ ,\ u(x,0)=\cos x \ ,\ u'_t(x,0)=c\sin x$$

حل - در این مسئله $f(x)=\cos x$ و $g(x)=c\sin x$ است وطبق فرمول دالامبر :

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\cos(x+ct)+\cos(x-ct)\right)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} c\sin\tau\,d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos(x+ct)+\cos(x-ct)\right)-\frac{1}{2}\cos\tau\Big|_{\tau=x-ct}^{x+ct}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos(x+ct)+\cos(x-ct)\right)-\frac{1}{2}\left(\cos(x+ct)-\cos(x-ct)\right)=\cos(x-ct)$$

۲- حل معادله موج ناهمگن در تمام صفحه :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+h(x,t)\ ; \quad -\infty<x<\infty \ ,\ t>0 \ ;\ u(x,0)=f(x) \ ,\ u'_t(x,0)=g(x)$$

در اینجا نمی توان فرمول دالامبر بکار گرفت . برای حل ابتدا جواب عمومی معادله همگن $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ را تعیین می کنیم وسپس یک جواب خصوصی معادله غیر همگن را به آن اضافه می کنیم

$$u(x,t)=F(x+ct)+G(x-ct)+u_p(x,t) \quad (3)$$

و شرایط اولیه مسئله را روی جواب عمومی (۳) اعمال می کنیم تا F و G تعیین شود.

مثال (۲) حل معادلهٔ $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin t=0$ در ناحیه: $-\infty<x<\infty$ و $t>0$

با شرایط اولیهٔ: $u(x,0)=\sin x$ و $u'_t(x,0)=1$

حل ـ الف ـ تعیین جواب عمومی معادلهٔ همگن:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

$$u=e^{mx+nt}\Rightarrow n^2e^{mx+nt}-m^2e^{mx+nt}=0\Rightarrow n^2-m^2=0$$

$$\Rightarrow n^2=m^2\Rightarrow n=\pm m \quad u=e^{mx+mt},\ u=e^{mx-mt}$$

$$u(x,t)=\sum_m A_m e^{m(x+t)}+\sum_m B_m e^{m(x-t)}=F(x+t)+G(x-t)$$

جواب عمومی معادلهٔ همگن.

ب ـ تعیین یک جواب خصوصی معادلهٔ غیرهمگن: می‌گیریم:

$$u_p=A\sin t\Rightarrow \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2}=-A\sin t,\ \frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2}=0$$

$$-A\sin t+\sin t=0\Rightarrow A=1 \quad u_p=\sin t$$

و جواب عمومی معادله غیرهمگن (معادلهٔ اصلی)

$$u(x,t)=F(x+t)+G(x-t)+\sin t \quad (*)$$

پ ـ اعمال شرایط اولیهٔ

$(i)\ u(x,0)=\sin x$

$t=0,\ u(x,0)=F(x)+G(x)+\sin 0=\sin x\Rightarrow F(x)+G(x)=\sin x \quad (\alpha)$

$(ii)\ u'_t(x,0)=1\Rightarrow u'_t(x,t)=F'(x+t)-G'(x-t)+\cos t$

$t=0:\ u'_t(x,0)=F'(x)-G'(x)+\underbrace{\cos 0}_{=1}=1\Rightarrow F'(x)-G'(x)=0$

$\Downarrow F(x)-G(x)=C \quad (\beta)$

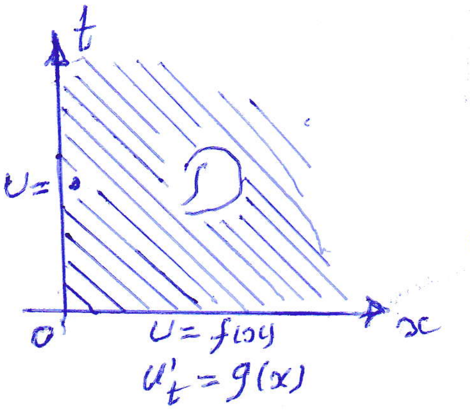
از حل دستگاه معادلات α و β: بدست می‌آوریم

$$\begin{cases}F(x)=\frac{1}{2}(\sin x+C)\\ G(x)=\frac{1}{2}(\sin x-C)\end{cases}$$

و این توابع را در جواب $(*)$ اعمال می‌کنیم:

$$u(x,t)=\underbrace{\frac{1}{2}[\sin(x+t)+C]}_{F(x+t)}+\underbrace{\frac{1}{2}[\sin(x-t)-C]}_{G(x-t)}+\sin t=\sin x\cos t+\sin t$$

۳- حل معادلهٔ موج در ربع صفحه



$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x>0 \text{ و } t>0 \\ \text{با شرایط مرزی و اولیهٔ} & \\ u(0,t)=0 & t>0 \\ u(x,0)=f(x) , u'_t(x,0)=g(x) & x>0 \end{cases}$$

حل این مسأله را منجر به حل معادلهٔ موج در نیم صفحهٔ $-\infty<x<\infty$ و $t>0$ می‌سازیم و سپس آن قسمت از جواب را که مربوط به ناحیه $D: x>0 , t>0$ است برمی‌گزینیم.

ابتداءً لازم به ذکر این دو نکته مهم است:

اول اینکه در حل مسأله مربوط به نیم صفحه قید $u(0,t)=0$ نداریم، ولی در ربع صفحه جوابی که بدست می‌آوریم بایستی در این شرط صدق کند.

دوم: در حل مسأله معادلهٔ موج در نیم صفحه لازم است که توابع $u(x,0)=f(x)$ و $u'_t(x,0)=g(x)$ در بازه $-\infty<x<\infty$ تعریف شوند (معلوم باشند). در صورتی که در حل معادله در ربع صفحه، این توابع به ازای $x>0$ تعریف می‌شوند. حال چگونه این اشکالات را برطرف می‌سازیم.

در زیر نشان می‌دهیم که اگر توابع $u(x,0)$ و $u'_t(x,0)$ را به فرم <u>توابعی فرد</u> تعریف کنیم به طوریکه به ازای $0<x<\infty$ این توابع همان $u(x,0)=f(x)$ و $u'_t(x,0)=g(x)$ مسأله ربع صفحه باشند، آنگاه با بکارگیری فرمول دالامبر به جوابی می‌رسیم که در آن $u(0,t)=0$ می‌شود.

به عبارت دیگر: ابتداءً توابع $u(x,0)=f(x)$ و $u'_t(x,0)=g(x)$ را در بازه $-\infty<x<\infty$ به توابعی فرد توسیع می‌دهیم و سپس معادله را در نیم صفحه حل می‌کنیم. این جواب در شرط $u(0,t)=0$ صدق می‌کند.

و آن قسمت از جواب را به مربوط به ربع صفحه است انتخاب می کنیم.

فرض کنید که توابع فرد $f^*(x)$ و $g^*(x)$ به ترتیب توسیع توابع $f(x)$ و $g(x)$ باشند داریم

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x) & x>0 \\ -f(-x) & x<0 \end{cases} \quad و \quad g^*(x)=\begin{cases} g(x) & x>0 \\ -g(-x) & x<0 \end{cases}$$

و بیان مسئله روی تمام صفحه:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad -\infty<x<\infty \ و \ t>0$$

$$u(x,0)=f^*(x) \quad -\infty<x<\infty \ ; \ u_t(x,0)=g^*(x) \quad -\infty<x<\infty$$

و جواب مسئله:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g^*(\tau)\,d\tau \qquad (1)$$

دیده می شود که:

$$u(0,t)=\frac{1}{2}\left[f^*(ct)+f^*(-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} g^*(\tau)\,d\tau$$

از آنجائی که f^* و g^* توابعی فرد هستند داریم

$$f^*(ct)+f^*(-ct)=f^*(ct)-f^*(ct)=0 \quad و \quad \int_{-ct}^{ct} g^*(\tau)\,d\tau=0$$

لذا: $u(0,t)=0$

مهم: توجه کنید که فرمول (1) را به ازای $x>0$ و $t>0$ حساب و ساده می کنیم چون $x>0$ و $t>0$ لذا $x+ct>0$ و $f^*(x+ct)=f(x+ct)$ است

اگر $x>0$ و $t>0$ و $x-ct>0$ باشد: $f^*(x-ct)=f(x-ct)$

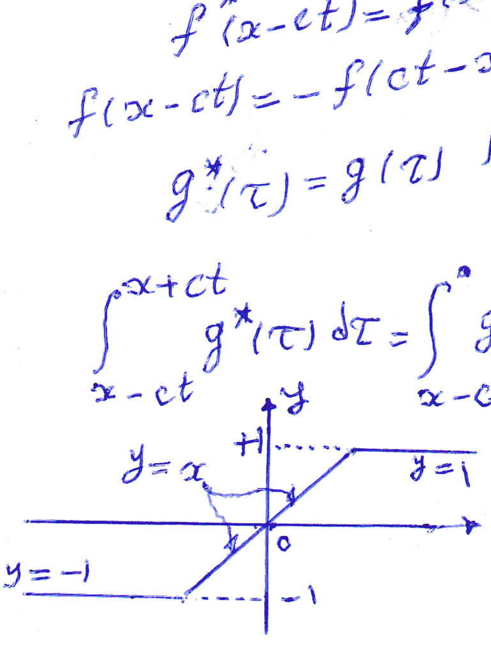
و در صورتی که $x-ct<0$ باشد، آنگاه $f(x-ct)=-f(ct-x)$

همچنین اگر $x-ct>0$ چون $x+ct>0$ است لذا $g^*(\tau)=g(\tau)$

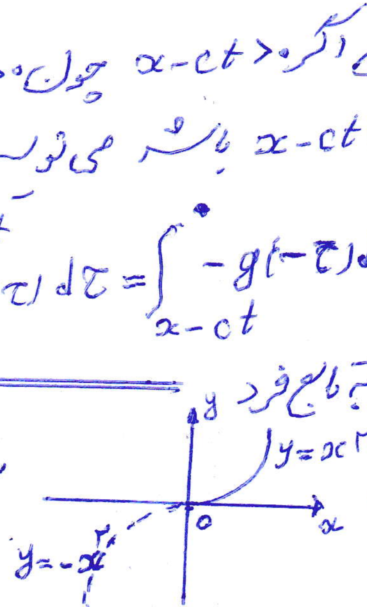
و اگر $x-ct<0$ باشد می نویسیم:

$$\int_{x-ct}^{x+ct} g^*(\tau)\,d\tau=\int_{x-ct}^{0} g^*(\tau)\,d\tau+\int_{0}^{x+ct} g^*(\tau)\,d\tau=\int_{x-ct}^{0} -g(-\tau)\,d\tau+\int_{0}^{x+ct} g(\tau)\,d\tau$$

دو مثال توسیع به تابع فرد



(۲ $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ 1 & x\geq 1 \end{cases}$



(۱ $f(x)=x^2 \quad x>0$

مثال (۳) حل معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ در ربع صفحه $x>0$ و $t>0$

تحت شرایط اولیه و مرزی $u(x,0)=\cos x,\ u'_t(x,0)=\sin x$ و $u(0,t)=0$

حل این مسئله را روی نیم صفحه $-\infty<x<\infty$ و $t>0$ توسیع می دهیم

برای این کار توسیع توابع $f(x)=\cos x$ و $g(x)=\sin x$ در $\mathbb{R}$ به توابع فرد

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\cos x & x>0\\ -\cos(-x)=-\cos x & x<0\end{cases}\qquad g(x)=\sin x \quad -\infty<x<\infty$$

وطبق فرمول دالامبر با توجه به $c^2=4$ و $c=2$ است:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)\,d\tau$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+2t)+f(x-2t)\right]+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} g(\tau)\,d\tau \qquad (1)$$

حال فرمول (۱) را در ناحیه $x>0$ و $t>0$ باز می کنیم.

الف) $x-2t>0$ یعنی $x>2t>0$:

$$\begin{cases} f(x+2t)=\cos(x+2t)\\ f(x-2t)=\cos(x-2t)\end{cases}\qquad g(\tau)=\sin\tau$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\cos(x+2t)+\cos(x-2t)\right]+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}\sin\tau\,d\tau$$

$$=\cos x\cos 2t-\frac{1}{4}\cos\tau\Big|_{\tau=x-2t}^{x+2t}=\cos x\cos 2t-$$

$$-\frac{1}{4}\underbrace{\left(\cos(x+2t)-\cos(x-2t)\right)}_{-2\sin x\sin 2t}=\cos x\cos 2t+\frac{1}{2}\sin x\sin 2t$$

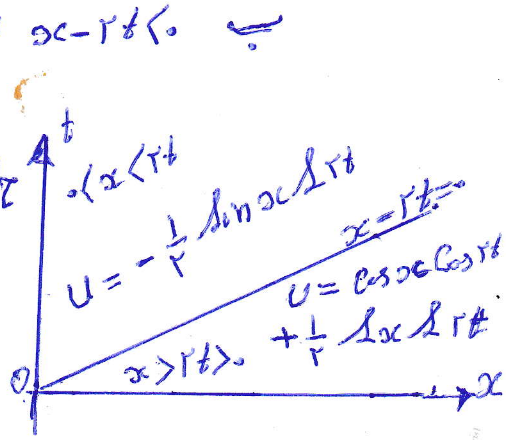
ب) $x-2t<0$ یعنی $0<x<2t$:

$$\begin{cases} f(x+2t)=\cos(x+2t)\\ f(x-2t)=-\cos(x-2t)\end{cases},\quad g(\tau)=\sin\tau$$

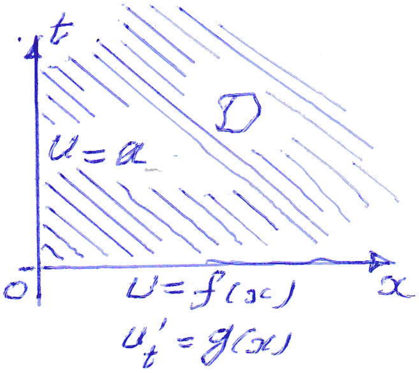
$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\cos(x+2t)-\cos(x-2t)\right]+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}\sin\tau\,d\tau$$

$$=-\sin x\sin 2t+\frac{1}{2}\sin x\sin 2t$$

$$\underline{u(x,t)=-\frac{1}{2}\sin x\sin 2t}$$



۴ - یک تعمیم برای حل معادله موج در ربع صفحه



طرح مسأله :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x>0 \,,\, t>0$$

$u(0,t)=a \quad (a\neq 0) \quad t>0$

$u(x,0)=f(x)$ و $u'_t(x,0)=g(x) \quad x>0$

برای حل این مسأله در آن تبدیل تابع

$$u(x,t)=v(x,t)+a$$

بکار می بریم و معادله بالا را روی تابع v و متغیرهای x و t می بریم :

$$u=v+a \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \,,\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$u(x,t)=v(x,t)+a \Rightarrow u(0,t)=v(0,t)+a \Rightarrow a=v(0,t)+a$$
$$\Rightarrow \underline{v(0,t)=0}$$

$$t=0 : u(x,0)=v(x,0)+a \Rightarrow f(x)=v(x,0)+a$$
$$\Rightarrow \underline{v(x,0)=f(x)-a}$$

$$u(x,t)=v(x,t)+a \Rightarrow u'_t(x,t)=v'_t(x,t) \Rightarrow \underline{v'_t(x,0)=u'_t(x,0)=g(x)}$$

و بیان مسأله روی تابع v :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & x>0 \,,\, t>0 \\ \underline{v(0,t)=0} & t>0 \\ v(x,0)=f(x)-a \,,\, v'_t(x,0)=g(x) & x>0 \end{cases}$$

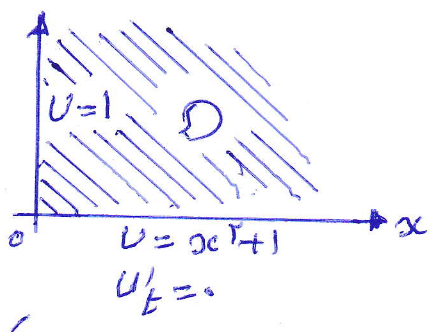
و مطابق شرح بند ۳ - این مسأله را حل می کنیم و پس : $u(x,t)=v(x,t)+a$

مثال (۴) : حل مسأله :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x>0 \,,\, t>0$$

$u(0,t)=1 \quad t>0$

$u(x,0)=x^2+1 \,,\, u'_t(x,0)=0 \quad x>0$



حل - در معادله تبدیل تابع $\underline{u(x,t)=v(x,t)+1}$

بکار می بریم با این تبدیل معادله تغییر نمی کند ، یعنی داریم

$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ ولی:

$u(x,t)=v(x,t)+1$

$\Rightarrow x=0:\ u(0,t)=v(0,t)+1 \Rightarrow 1=v(0,t)+1 \Rightarrow \underline{v(0,t)=0}$

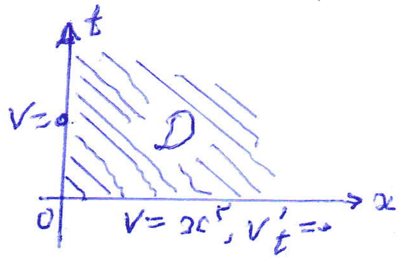
$t=0:\ u(x,0)=v(x,0)+1 \Rightarrow x^2+1=v(x,0)+1 \Rightarrow \underline{v(x,0)=x^2}$

$u'_t(x,t)=v'_t(x,t) \Rightarrow t=0:\ v'_t(x,0)=u'_t(x,0)=0 \Rightarrow \underline{v'_t(x,0)=0}$

و بیان مسئله روی تابع V:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\quad x>0,\ t>0$$

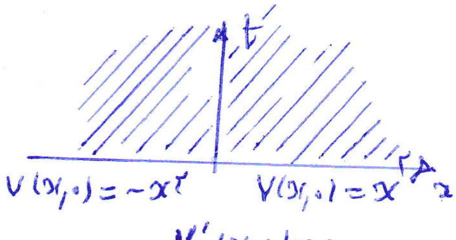
$v(0,t)=0$ و $v(x,0)=x^2$ و $v'_t(x,0)=0$



حال مسئله را به نیم صفحه توسیع می دهیم.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\quad -\infty<x<\infty,\ t>0$$

$$v(x,0)=\begin{cases} x^2 & x>0 \\ -(-x)^2=-x^2 & x<0\end{cases}\qquad v'_t(x,0)=0$$



$v'_t(x,0)=0$

$$v(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+t)+f(x-t)\right]$$

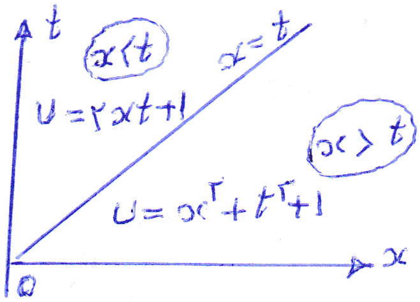
الف) $x-t>0\ (x>t) \Rightarrow v(x,t)=\frac{1}{2}\left[(x+t)^2+(x-t)^2\right]=x^2+t^2$

ب) $x-t<0\ (x<t) \Rightarrow v(x,t)=\frac{1}{2}\left[(x+t)^2-(x-t)^2\right]=2xt$

وجواب روی تابع $u(x,t)$ $\left(u(x,t)=v(x,t)+1\right)$

$\Rightarrow x>t\quad u(x,t)=x^2+t^2+1$

$x<t\quad u(x,t)=2xt+1$



مسائل مربوط به معادله موج

۱) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $-\infty<x<\infty\,,\ t>0$ و $u(x,0)=\frac{u_0}{a^2+x^2}$ و $u'_t(x,0)=b$

جواب :

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2}\left(\frac{1}{a^2+(x+ct)^2}+\frac{1}{a^2+(x-ct)^2}\right)+bt$$

۲) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}+\lambda\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ $\quad -\infty<x<\infty\,,\ t>0$

$u(x,0)=f(x)\,,\ u'_t(x,0)=0 \quad \lambda\neq\mu$

جواب :

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+\lambda t)+f(x+\mu t)]$$

۳) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\sin\pi x \quad -\infty<x<\infty\,,\ t>0$

$u(x,0)=u'_t(x,0)=0$

جواب : $u(x,t)=\frac{1}{\pi^2}\sin\pi x(1-\cos\pi t)$

(۴) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+1$; $-\infty<x<\infty\,,\ t>0$; $u(x,0)=1$ و $u'_t(x,0)=0$

(۵) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^{-t} \quad -\infty<x<\infty\,,\ t>0$; $u(x,0)=\cos x\,,\ u'_t(x,0)=0$

جواب : $u(x,t)=\cos x\cos t+t+e^{-t}$

(۶) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $x>0\,,\ t>0$; $u(x,0)=e^{-x}\,,\ x>0$ و $u'_t(x,0)=0$

$u(0,t)=0$

جواب : $0<x<t$: $u(x,t)=-e^{-t}\sinh x$; $x>t>0$: $u(x,t)=e^{-x}\cosh t$ $\Rightarrow$

(۷) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $x>0\,,\ t>0$; $u(x,0)=u_0(1+x^3)\,,\ x>0\,,\ u'_t(x,0)=0$

$u(0,t)=u_0$

جواب :

$$u(x,t)=u_0(x^3+3a^2xt^2+1)$$

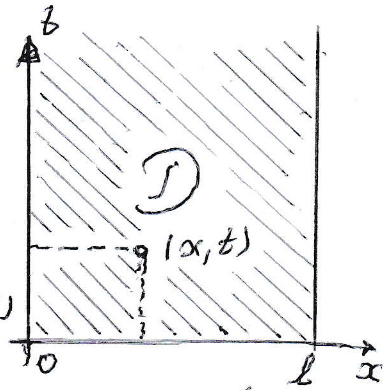
۴ - بکارگیری سری فوریه

۴-۱ - معادله انتشار . این مسأله به این صورت مطرح می‌شود :

(۱) معادله : $\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad c>0$

(۲) قلمرو حل : $0<x<l$ و $t>0$

(۳) شرایط مرزی و اولیه : $\begin{cases} u(0,t)=0 \text{ و } u(l,t)=0 & t>0 \\ u(x,0)=f(x) & 0<x<l \end{cases}$



توجه کنید تمام مسائلی که کاربرد فیزیکی دارند شامل عناصر (۱) و (۲) و (۳) می‌باشند ، یعنی معرفی معادله ، حدود متغیرها و مقدار و یا مقادیر تابع روی مرز قلمرو حل ، و هدف یافتن مقدار تابع به ازای مقادیر متغیرها در قلمرو حل است .

معادلهٔ (۱) ، معادلهٔ دیفرانسیل توزیع درجه حرارت (u) در یک میله با طول محدود l ، در هر نقطه متغیر از میله (x) و هر لحظه (t) می‌باشد ، همچنین توزیع آلودگی در یک کانال به طول l درصورتی که سیال ساکن باشد است ، به طوری که میزان آلودگی در ابتدا و انتهای کانال در هر لحظه t ، $u(0,t)=u(l,t)=0$ است و توزیع آلودگی در لحظه $t=0$ در طول کانال از تابع مفروض $f(x)$ $(0<x<l)$ تبعیت می‌کند . به عدد ثابت و معلوم $c>0$ ضریب انتشار گفته می‌شود .

توجه کنید که مسأله بالا ساده‌ترین شکل معادلهٔ انتشار است و این مسأله به گونه‌های مختلف می‌توان تعمیم داد . این تعمیم می‌تواند روی فرم معادله یا قلمرو حل و یا شرایط مرزی باشد که دو تعمیم برای این مسأله در این درس خواهیم داشت :

تعمیم اول : معادله و قلمرو حل تغییر نمی‌کند ولی :

$$u(0,t)=0 \text{ و } u(l,t)=0 \Longrightarrow u(0,t)=a \text{ و } u(l,t)=b \quad a,b\neq 0$$

تعمیم دوّم تغییر فقط روی معادله:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-b\frac{\partial u}{\partial x}$$

حال می پردازیم به حل مسئله (۴-۱)

قبلاً توجه شما را به نکته جلب می کنم که در حل مسئله این چنین نیست که ابتدا جواب عمومی معادله را که شامل توابع دلخواه است بدست بیاوریم و در انتها شرط های مرزی را روی آن اعمال کنیم، بلکه اعمال شرط های مرزی در مسیر حل معادله صورت می گیرد.

حل مسئله در ۴ مرحله انجام می شود:

I - مرحله اول: در این مرحله با معادله (۱) کار داریم و جوابهای خصوصی آن را بدست می آوردیم ولی این جواب خصوصی را به صورت $u=e^{mx}\times e^{nt}$ درنظر نمی گیریم بلکه کلی تر عمل می کنیم، به این نحو که بجای تابع e^{mx} تابع مجهول $X=X(x)$ و بجای تابع e^{nt} تابع مجهول $T=T(t)$ درنظر می گیریم یعنی $u(x,t)=X(x)T(t)$ و این تابع را در معادله می بریم توجه کنید:

$$\Rightarrow u(x,t)=X(x)T(t) \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=X(x)T'(t) \text{ و} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''(x)T(t)\end{cases}$$

و این مشتق ها را در معادله می بریم

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1) \Rightarrow X(x)T'(t)=cX''(x)T(t)$$

طرفین معادله را بر $X(x)T(t)$ تقسیم می کنیم:

$$\Rightarrow \frac{X(x)T'(t)}{X(x)T(t)}=c\frac{X''(x)T(t)}{X(x)T(t)} \xrightarrow{\text{ساده می کنیم}} \frac{T'(t)}{T(t)}=c\frac{X''(x)}{X(x)}$$

یا (۳) $\dfrac{T'(t)}{cT(t)}=\dfrac{X''(x)}{X(x)}$ در اینجا گفته می شود که متغیرها از هم جدا شده اند (اصولاً به این روش، روش جداسازی متغیرها گفته می شود) یعنی طرف چپ معادله

روی متغیر t (فقط) و طرف راست آن برحسب متغیر x است. (نکتهٔ مهم ۴)

با توجه اینکه x و t مستقل از هم هستند (یعنی بین آنها رابطه‌ای وجود ندارد)، ایجاد معادله (۴) مستلزم این است که هر دو طرف آن برابر مقدار ثابتی باشد (این مطلب را در پایان به صورت یک یادداشت ثابت می‌کنیم) یعنی:

$$\frac{T'(t)}{cT(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=k$$

لذا: داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{T'(t)}{cT(t)}=k & :(\alpha)\\[2ex] \dfrac{X''(x)}{X(x)}=k & :(\beta)\end{cases}$$

(α) و (β) هر یک معادلات دیفرانسیل معمولی هستند، (α) یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی رستهٔ ۱ یک روی متغیر t و تابع T و (β) یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی از رستهٔ ۲ روی متغیر x و تابع X و این دو معادله را حل می‌کنیم. (k در هر دو معادله یکسان می‌باشد) ابتدا حل معادلهٔ (α):

$$\Rightarrow \frac{T'(t)}{cT(t)}=k \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)}=ck \Rightarrow \text{انتگرال می‌گیریم} \Rightarrow \ln T(t)=ckt+C$$

$$\Rightarrow T(t)=e^{ckt+C}=e^{C}\times e^{ckt} \Rightarrow T(t)=C_0\, e^{ckt} \qquad (۵)$$

(دیده می‌شود که $T(t)$ همان تابع نمایی بدست آمد)

و سپس حل معادلهٔ (β):

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}=k \Rightarrow X''(x)=kX(x) \Rightarrow X''(x)-kX(x)=0$$

(خیلی مهم) $\Leftarrow$ این یک معادله خطی با ضریب‌های ثابت است و برای حل آن ابتدا باید معادلهٔ مفسر مربوط به آن را تشکیل داد: $m^2-k=0$ جواب‌های این معادله و درنتیجه جواب عمومی معادله (β) بستگی به علامت k دارد. (یک مثال عددی به عنوان روشن شدن مطلب):

الف) $k>0$, $k=4$ $\quad m^2-4=0 \Rightarrow m=\pm 2$

$$X(x)=C_1 e^{2x}+C_2 e^{-2x} \text{ و}$$

ب) $k<0$ $\quad k=-4 \Rightarrow m^2+4=0 \Rightarrow m=\pm 2i \Rightarrow X(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

پ) $k=0 \Rightarrow X''(x)=0 \Rightarrow X(x)=C_1x+C_2$)

ثابت می‌شود در حالت‌های $k=0$ و $k>0$ جواب‌های بدست آمده بعد از اعمال شرط‌های مرزی $u(0,t)=0$ و $u(l,t)=0$ به جواب خصوصی $u(x,t)\equiv 0$ میرسیم که به آن جواب پوچ گفته می‌شود و در جمع تمام جوابهای خصوصی به عنوان جواب نهائی دخالت دادن این توابع همراه با توابع دیگر در نتیجه تأثیری نمی‌گذارد. بنابراین در ادامه حل حالت $k<0$ را در نظر می‌گیریم (اینکه $k=0$ یا $k>0 \Rightarrow u(x,t)\equiv 0$، بعداً به صورت تک یادداشت اثبات می‌شود) k ی منفی را می‌توان با $k=-\lambda^2$ $(\lambda>0)$ نشان داد (مثال $k=-5$ ، $\lambda=\sqrt{5}$) حال معادله (B) به این صورت نوشته می‌شود

$X''(x)+\lambda^2X(x)=0$ (B) و معادله مفسر این معادله $m^2+\lambda^2=0$ و ریشه‌های آن $m=\pm\lambda i$ و جواب عمومی معادله (B):

$$X(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x \quad (۶)$$

ضمناً همین مقدار k (یعنی $k=-\lambda^2$) را در تابع (۵) قرار می‌دهیم

$$T(t)=C_0e^{ckt}=C_0e^{-c\lambda^2 t}$$

و جواب‌های خصوصی معادله انتشار:

$$u(x,t)=X(x)T(t)=(C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x)C_0e^{-c\lambda^2 t}$$

$$=(C_0C_1\cos\lambda x+C_0C_2\sin\lambda x)e^{-c\lambda^2 t} \qquad C_0C_1=A,\ C_0C_2=B$$

$$u(x,t)=(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)e^{-c\lambda^2 t} \quad (۷)$$

و مرحله اول تمام شد.

II مرحله دوم: قبل از اینکه جوابهای خصوصی (۷) را با هم جمع کنیم شرط‌های مرزی $u(0,t)=0$ و $u(l,t)=0$ را روی این توابع اعمال می‌کنیم (واضح است که روی جمع آنها هم این دو شرط برقرار می‌ماند)

(i) $u(0,t)=0$

$$u(0,t)=(A\cos 0+B\sin 0)e^{-c\lambda^2 t}=0 \qquad \cos 0=1,\ \sin 0=0$$

$$x=0 \quad u(0,t)=Ae^{-c\lambda^2 t}=0 \quad \forall t>0 \Rightarrow A=0$$

پس تا اینجا داریم

$(v) \Rightarrow u(x,t) = B \sin \lambda x \, e^{-c\lambda^2 t}$

(ii) $u(x=l,t)=0$

$x=l$: $u(l,t) = B \sin \lambda l \, e^{-c\lambda^2 t} = 0 \quad \forall t>0$

$\Rightarrow B \sin \lambda l = 0$

اگر $B=0$ باشد آنگاه : $u(x,t)\equiv 0$ که به جواب پوچ می‌رسیم

لذا برای رسیدن به جوابهای غیر پوچ بایستی $B\neq 0$ ولی $\sin \lambda l = 0$ باشد

باتوجه به اینکه $\lambda>0$: $\sin \lambda l = 0 \Rightarrow \lambda l = n\pi$ یعنی $\lambda = \frac{n\pi}{l}$, $n=1,2,3,\dots$

پس تکلیف λ هم در اینجا روشن می‌شود یعنی λ مضربهای صحیح $\frac{\pi}{l}$ است.

لذا جوابهای خصوصی (غیر پوچ) معادله به این صورت نوشته می‌شود

$$u(x,t) = B \sin \lambda x \, e^{-c\lambda^2 t} = B \sin \frac{n\pi}{l} x \, e^{-\frac{cn^2\pi^2}{l^2} t}$$

$n=1,2,3,4,\dots$ ولی ضریب B به ازای هر جواب خصوصی (یعنی به ازای هر n) می‌تواند متفاوت باشد یعنی

جوابهای خصوصی معادله

$$\Rightarrow u(x,t) = B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \, e^{-\frac{cn^2\pi^2}{l^2} t} \quad n=1,2,3,\dots \quad (\lambda)$$

و مرحله II تمام شد.

III - مرحله سوم جمع جوابهای (۸) به عنوان جواب نهایی است :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \, e^{-\frac{cn^2\pi^2}{l^2} t} \quad (9)$$

(توجه : تابع (۹) در معادله $\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$: و شرط‌های $u(0,t)=0$ و $u(l,t)=0$ صدق می‌کند) تا اینجا فقط B_n ها مجهول هستند)

IV - مرحله چهارم . اعمال شرط $u(x,0)=f(x)$ روی جواب (۹) :

$$t=0 \quad u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \, e^{-0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x) \quad (10)$$

$0<x<l$

(خوب دقت کنید) حال می‌گوییم رابطه (۱۰) بیانگر بسط نیم دامنه تابع $f(x)$ در بازه $(0,l)$ به سری سینوس-فوریه است و B_n ها ضریب‌های این بسط هستند و همانطور که قبلاً بیان شد:

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad (11)$$

حال طبق انتگرال (۱۱) B_n ها را حساب می‌کنیم و آنها را در تابع (۹) یعنی:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n \sin\frac{n\pi}{l}x\, e^{-\frac{cn^2\pi^2}{l^2}t} \qquad (9)$$

قرار می‌دهیم و جواب مسئله برحسب یک سری بیان می‌شود. تمام شد

توجه: از یک مسئله به مسئله دیگر یکی ضریب c و طول l و دیگری تابع $f(x)$ تغییر می‌کند که $f(x)$ هم در مرحله چهارم حل وارد معرکه می‌شود. اگر حل مسئله‌ای از شما خواسته شد مستقیماً روی آن مسئله باید ۴ مرحله عملیات بالا را انجام دهید. مثلاً مانند حل مسئله زیر:

مثال (۱)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0<x<1,\ t>0\\ u(0,t)=0 \quad u(1,t)=0\\ u(x,0)=U_0x\end{cases}$$

در این مسئله $l=1$، $c=1$ و $f(x)=U_0x$ و U_0 مقداری است ثابت و معلوم:

حل: مرحله I - تعیین جوابهای خصوصی به صورت $u(x,t)=X(x)T(t)$ در معادله می‌گذاریم:

$$X(x)T'(t)=X''(x)T(t)\Rightarrow\frac{X(x)T'(t)}{X(x)T(t)}=\frac{X''(x)T(t)}{X(x)T(t)}$$

$$\Rightarrow\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=K=-\lambda^2 \quad (K<0)$$

$$\begin{cases}\dfrac{T'(t)}{T(t)}=-\lambda^2\Rightarrow \ln T(t)=-\lambda^2t+C\Rightarrow T(t)=e^{-\lambda^2t+C}=C_0e^{-\lambda^2t}\\ \dfrac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2\Rightarrow X''(x)+\lambda^2X(x)=0\Rightarrow m^2+\lambda^2=0\Rightarrow m=\pm\lambda i\end{cases}$$

$$X(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x$$

$$u(x,t)=X(x)T(t)=(C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x)C_0e^{-\lambda^2t}=(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)e^{-\lambda^2t}$$

جوابهای خصوصی (جوابهای پایه‌ای) معادله: $u(x,t)=(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)e^{-\lambda^2 t}$

مرحله II - اعمال شرائط مرزی $u(0,t)=0$ و $u(1,t)=0$ روی جوابهای پایه‌ای

$$\begin{cases}(i)\ u(0,t)=0 \underset{x=0}{\Rightarrow} u(0,t)=(A\times 1+B\times 0)e^{-\lambda^2 t}=0 \quad \forall t>0 \Rightarrow A=0\\ (ii)\ u(1,t)=0 \underset{x=1}{\Rightarrow} u(1,t)=B\sin(\lambda\times 1)e^{-\lambda^2 t}=0 \Rightarrow B\sin\lambda=0 \quad B\neq 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin\lambda=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=n\pi}$$

پس تا اینجا جوابهای خصوصی معادله به این صورت نوشته می‌شود ($A=0$ و $\lambda=n\pi$)

$$u=B\sin\lambda x\, e^{-\lambda^2 t}=B_n\sin n\pi x\, e^{-n^2\pi^2 t}$$

مرحله III - جمع جوابهای خصوصی (پایه‌ای) به عنوان جواب نهائی است:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin n\pi x\, e^{-n^2\pi^2 t} \quad (*)$$

مرحله IV - اعمال شرط اولیه: $u(x,0)=u_0 x$ $\quad f(x)=u_0 x$ $\quad 0<x<1$

$$t=0 \quad u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin n\pi x=u_0 x \qquad 0<x<1$$

این رابطه بیانگر بسط نیم دامنه تابع $f(x)=u_0 x$ به سری سینوسی فوریه در بازه $(0,1)$ $(l=1)$ است و B_n ضرایب این بسط هستند:

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2}{1}\int_0^1 u_0 x\sin n\pi x\,dx$$

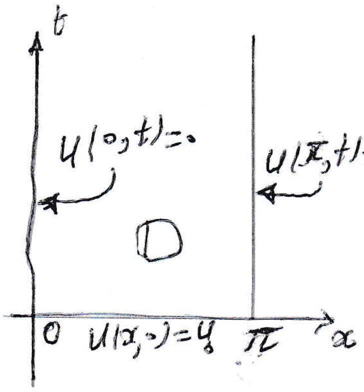
$$B_n=2u_0\int_0^1 \underset{u}{x}\underbrace{\sin n\pi x\,dx}_{dv}=2u_0\Big[x\underbrace{\left(-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\right)}_{v}\Big|_0^1-\int_0^1\underbrace{\left(-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\right)}_{v}dx\Big]$$

$$=2u_0\Big[1\times\left(-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi\right)+\frac{1}{n\pi}\times\underbrace{\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1}_{=0}\Big]=2u_0\left(-\frac{1}{n\pi}\right)(-1)^n$$

$$\boxed{B_n=\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}}$$

حال B_n را در فرمول $(*)$ قرار می‌دهیم؛ جواب است:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin n\pi x\, e^{-n^2\pi^2 t}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x\, e^{-n^2\pi^2 t}$$



مثال ۴ - حل معادلهٔ $\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ، $0<x<\pi$ ، $t>0$

$u(0,t)=0$ ، $u(\pi,t)=0$

با تعداد شرایط ثابت: $u(x,0)=u_0$

در این مسأله $l=\pi$ است

حل - I - تابع $u(x,t)=X(x)T(t)$ را در معادله می‌گذاریم:

$\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow X(x)T'(t)=cX''(x)T(t)$ پس از جدا سازی متغیرها:

$$\frac{T'(t)}{cT(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=k=-\lambda^2 \quad (k<0)$$

لذا داریم:

$$\begin{cases} \frac{T'(t)}{cT(t)}=-\lambda^2 \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)}=-c\lambda^2 \Rightarrow \ln T(t)=-c\lambda^2 t+C \Rightarrow T(t)=C_0e^{-c\lambda^2 t} \\ \frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2 \Rightarrow X''(x)+\lambda^2X(x)=0 \Rightarrow X(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x \end{cases}$$

جوابهای پایه‌ای معادله:

$$u(x,t)=X(x)T(t)=(C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x)C_0e^{-c\lambda^2 t} \qquad \begin{cases} C_1C_0=A \\ C_2C_0=B \end{cases}$$

$$u(x,t)=(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)e^{-c\lambda^2 t} \quad (*)$$

II - اعمال شرط‌های مرزی مربوط به $u=0$:

$\Rightarrow u(0,t)=0 \underset{x=0}{\Rightarrow} u(0,t)=Ae^{-c\lambda^2 t}=0 \Rightarrow A=0$

لذا تابع:

$(*) \Rightarrow u(x,t)=B\sin\lambda x\, e^{-c\lambda^2 t} \quad (**)$

$\Rightarrow u(\pi,t)=0 \underset{x=\pi}{\Rightarrow} B\sin\lambda\pi\, e^{-c\lambda^2 t}=0 \quad \forall t>0 \Rightarrow B\sin\lambda\pi=0$

$B\neq 0 \Rightarrow \sin\lambda\pi=0 \Rightarrow \lambda\pi=n\pi \Rightarrow \lambda=n$ ، $n=1,2,3,4,\dots$

لذا: $(**) \Rightarrow u(x,t)=B_n\sin nx\, e^{-cn^2 t}$ ، $n=1,2,3,4,\dots$

مهم: توجه کنید که اعمال شرط $u(0,t)=0$ روی خط تمام سمت چپ (محور t) نتیجه می‌دهد $A=0$ و اعمال شرط $u(l,t)=0$ روی خط تمام سمت راست نتیجه می‌شود $\lambda=\frac{n\pi}{l}$ که در این مثال $l=\pi$ است که $\lambda=n$ می‌شود.

III - مرحله سوم حل - جمع جوابهای خصوصی (ارایه ای) بعنوان جواب نهائی مسئله

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx\, e^{-cn^2t} \quad (***)$$

IV - مرحله چهارم . اعمال شرط اولیه

$$u(x,0)=u_0 \quad (f(x)=u_0)$$

$$(***) \Rightarrow u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx = u_0$$

و از اینجا

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0 \sin nx\,dx$$

$$=\frac{2u_0}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}=\frac{2u_0}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\right)\{\cos n\pi-\cos 0\}$$

$$=-\frac{2u_0}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)=\frac{2(1-(-1)^n)u_0}{n\pi}$$

و جواب مسئله :

$$(***) \Rightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^n)u_0}{n\pi}\sin nx\, e^{-cn^2t}$$

$$u(x,t)=\frac{2u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}e^{-cn^2t}\sin nx$$

مثال ۳)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0<x<\pi \,,\, t>0$$

$$u(0,t)=0 \quad \text{و} \quad u(\pi,t)=0$$

$$u(x,0)=u_0(\sin x+\sin 3x)$$

حل - عناصر این مسئله همانند مثال (۲) می باشد بجز تابع $f(x)$ که در این مثال :

$u(x,0)=f(x)=u_0\sin x+u_0\sin 3x$ است

لذا عملیات مربوط به مرحله های I و II و III دقیقاً مانند مثال قبل است که در اینجا تکرار نمی کنیم . لذا جواب نهائی این مسئله عبارتست از :

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin nx\, e^{-cn^2t}$$

IV: حال اعمال شرط :

$$u(x,0)=u_0\sin x+u_0\sin 3x$$

$\Rightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-cn^2t}\sin nx$ جواب نهائی

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx = \underbrace{u_0\sin x+u_0\sin 3x}_{f(x)} \quad (\alpha)$$

حال می توان براساس فرمول:

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(u_0\sin x+u_0\sin 3x)\sin nx\,dx$$

ضریب B_n را حساب کرد ولی این کار لازم نیست و در این مثال خاص می توان B_n ها را به سادگی حساب کرد رابطه (α) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم

$$(\alpha)\Rightarrow B_1\sin x+B_2\sin 2x+B_3\sin 3x+B_4\sin 4x+\dots=u_0\sin x+u_0\sin 3x$$

دقت کنید که طرف راست هم یک سری سینوسی فوریه با $B_1=u_0$ ، $B_2=0$ ، $B_3=u_0$ ، $B_4=0$ ، $B_5=0$ ، ... است لذا با مقایسه ضریب های جملات دو طرف:

(یعنی به غیر B_1 و B_3 سایر B_n ها صفراند)

$$\Rightarrow B_1=u_0 \text{ و } B_3=u_0 \text{ و } B_n=0 \text{ اگر } n\neq 1,3$$

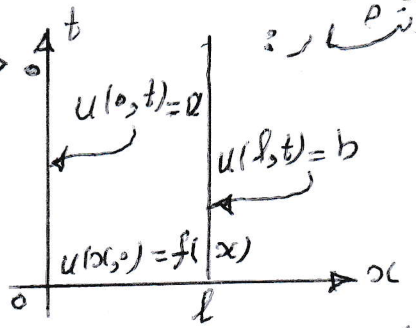
با اعمال این B_n ها در فرمول جواب:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-cn^2t}\sin nx = B_1 e^{-c(1)^2t}\sin 1\times x+B_3 e^{-c(3)^2t}\sin 3x$$
$$=u_0e^{-ct}\sin x+u_0e^{-9ct}\sin 3x=u_0(e^{-ct}\sin x+e^{-9ct}\sin 3x)$$

اگر توسط انتگرال گیری B_n ها را حساب می کردیم به همین جواب می رسیدیم

تعمیم اول معادله انتشار:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0<x<l,\ t>0$$
$$u(0,t)=a,\ u(l,t)=b$$
$$u(x,0)=f(x)$$



حل بالا را روی این مسئله انجام نمی دهیم، بلکه ابتدا این مسئله را به مسئله مشابهی تبدیل می کنیم که در آن شرایط مرزی تابع روی خطوط قائم برابر صفر باشد ولی چگونه؟ جواب: در این مسئله تبدیل تابع

$$u(x,t)=v(x,t)+Ax+B$$

بکار می‌گیریم و مسأله را روی تابع $V(x,t)$ می‌بریم A و B مقادیر ثابتی هستند و آنها را چنان تعیین می‌کنیم که برای تابع $V(x,t)$ داشته باشیم $V(l,t)=0$ و $V(0,t)=0$

ابتدا: بیان معادله روی تابع V:

$$\Rightarrow u(x,t)=V(x,t)+Ax+B \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \longrightarrow \frac{\partial V}{\partial t}=c\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \qquad 0<x<l ,\ t>0$$

بنابراین با بکارگیری تبدیل بالا شکل معادله عوض نمی‌شود یعنی همان معادله‌ای که روی تابع u داشتیم روی تابع V داریم.

حال A و B را چنان تعیین می‌کنیم که اگر $u(0,t)=a$ و $u(l,t)=b$ باشد داشته باشیم $V(0,t)=0$ و $V(l,t)=0$:

$$u(x,t)=V(x,t)+Ax+B \xRightarrow{x=0} \underbrace{u(0,t)}_{=a}=\underbrace{V(0,t)}_{=0}+A\times 0+B$$

$$\Rightarrow \boxed{a=B}$$

و به ازای $x=l$:

$$\underbrace{u(l,t)}_{=b}=\underbrace{V(l,t)}_{=0}+Al+B$$

$$\Rightarrow b=0+Al+a \Rightarrow \boxed{A=\frac{b-a}{l}}$$

حال ارتباط بین توابع u و V دقیقاً مشخص می‌شود:

$$u(x,t)=V(x,t)+\frac{b-a}{l}x+a$$

حال مسأله روی تابع V می‌بریم و عملیات حل را روی تابع V انجام می‌دهیم

معادله: $\frac{\partial V}{\partial t}=c\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \qquad 0<x<l ,\ t>0$

شرایط مرزی $V(0,t)=0$, $V(l,t)=0$

شرط اولیه $V(x,0)=u(x,0)-\frac{b-a}{l}x-a=f(x)-\frac{b-a}{l}x-a$

توجه کنید تمام عناصر مسأله باید روی تابع V نوشته شود از جمله $V(x,0)$

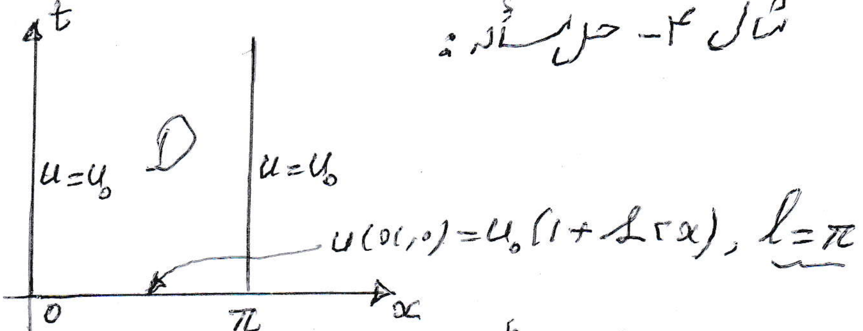
پس $f(x)-\frac{b-a}{l}x-a$ در حکم $f(x)$ مسأله جدید است. پس از حل مسأله روی تابع V ، و تعیین تابع $V(x,t)$ ، $u(x,t)$ را بدست می‌آوریم

مثال ۴- حل مسأله:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad 0<x<\pi\ ,\ t>0$$

$$u(0,t)=u_0\ ,\ u(\pi,t)=u_0$$

$$u(x,0)=u_0(1+\sin 2x)$$



حل - در این مسأله $u(0,t)$ و $u(\pi,t)\neq 0$ لذا در معادله تبدیل تابع:

$u(x,t)=v(x,t)+Ax+B$ بکار می‌بریم و تمام عناصر مسأله را روی تابع v می‌بریم

با این تبدیل معادله روی تابع تغییر نمی‌کند یعنی داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=c\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

ثابت‌های A و B را چنان تعیین می‌کنیم که برای تابع v داشته باشیم: $v(0,t)=0$ و $v(\pi,t)=0$

$$\Rightarrow u(x,t)=v(x,t)+Ax+B$$

$$x=0\Rightarrow u(0,t)=v(0,t)+A\times 0+B\Rightarrow u_0=0+B\Rightarrow B=u_0$$

$$x=\pi\Rightarrow u(\pi,t)=v(\pi,t)+A\pi+B\Rightarrow u_0=0+A\pi+u_0\Rightarrow 0=A\pi\Rightarrow A=0$$

لذا داریم:

$$u(x,t)=v(x,t)+u_0$$

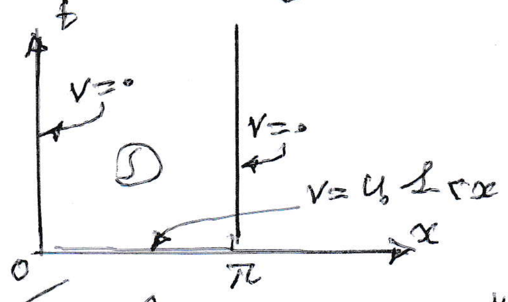
ضمناً به ازای $t=0$ داریم:

$$v(x,0)=u(x,0)-u_0\Leftarrow u(x,0)=v(x,0)+u_0$$

$$=u_0(1+\sin 2x)-u_0\Rightarrow v(x,0)=u_0\sin 2x$$

بیان مسأله روی تابع v:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}=c\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & 0<x<\pi\ ,\ t>0\\ v(0,t)=0\ ,\ v(\pi,t)=0\\ v(x,0)=u_0\sin 2x\end{cases}$$



حال حل مسأله را روی تابع v شروع می‌کنیم:

I: یافتن جواب‌های پایه‌ای $v(x,t)=X(x)T(t)$. این تابع را در معادله می‌بریم

$$\frac{\partial v}{\partial t}=c\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Rightarrow X(x)T'(t)=cX''(x)T(t)\Rightarrow\frac{X(x)T'(t)}{X(x)T(t)}=c\frac{X''(x)T(t)}{X(x)T(t)}$$

$$\Rightarrow\frac{T'(t)}{T(t)}=c\frac{X''(x)}{X(x)}\Rightarrow\frac{T'(t)}{cT(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=k=-\lambda^2\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{T'(t)}{cT(t)}=-\lambda^2 & (\alpha)\\[2mm] \dfrac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2 & (\beta)\end{cases}$$

جواب عمومی معادله (α) : $T(t)=C_0 e^{-c\lambda^2 t}$

" " " (β) : $X(x)=C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x$

و جوابهای پایه‌ای :

$$v(x,t)=(C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x)C_0 e^{-c\lambda^2 t}$$

$$v(x,t)=(A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)e^{-c\lambda^2 t}$$

II - اعمال شرایط مرزی $v(0,t)=v(\pi,t)=0$ روی جوابهای پایه‌ای :

(i) $x=0$, $v(0,t)=(A+B\times 0)e^{-c\lambda^2 t}=0 \Rightarrow A=0$

لذا : $v(x,t)=B\sin\lambda x\, e^{-c\lambda^2 t}$

(ii) $x=\pi$, $v(\pi,t)=B\sin\lambda\pi\, e^{-c\lambda^2 t}=0$ ، $B\neq 0$ $\sin\lambda\pi=0 \Rightarrow \lambda\pi=n\pi$

$\lambda=n$, $n\in\mathbb{N}$

لذا :

$$v(x,t)=B\sin nx\, e^{-cn^2 t}$$

یا

$$v(x,t)=B_n e^{-cn^2 t}\sin nx \quad n=1,2,3,4,\dots$$

III - جمع جوابهای پایه‌ای به عنوان جواب نهائی :

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-cn^2 t}\sin nx \quad (*)$$

IV - اعمال شرط $v(x,0)=u_0\sin 2x$

$$v(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{0}\sin nx = B_1\sin x + B_2\sin 2x + B_3\sin 3x + B_4\sin 4x+\dots$$

$$=u_0\sin 2x$$

لذا : $B_2=u_0$ و

$$B_1=B_3=B_4=B_5=B_6=\dots=0$$

لذا جمع $(*)$ منحصر به یک جمله می‌شود و آن هم بازای اندیس $n=2$ (و سایر جمله‌ها صفر اند)

لذا : $v(x,t)=B_2 e^{-c(2)^2 t}\sin 2x$ یعنی $v(x,t)=u_0 e^{-4ct}\sin 2x$

و در نهایت سراغ تابع اصلی یعنی $u(x,t)$ می‌رویم : (تابع v را از صحنه خارج می‌سازیم)

$$\Rightarrow u(x,t)=v(x,t)+u_0 \Rightarrow \boxed{u(x,t)=u_0 e^{-4ct}\sin 2x+u_0}$$

جواب مسأله

تعمیم دوم معادله انتشار :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\frac{\partial u}{\partial x} \quad 0<x<l\ ,\ t>0$$

$u(0,t)=0$ و $u(l,t)=0$ $t>0$

$u(x,0)=f(x)$ $0<x<l$

این معادله انتشار آلودگی در یک کانال به طول l است وقتی که سرعت سیال b و ضریب انتشار c است.

هرچند که می توان عملیات حل معادله را مستقیماً روی این مسأله آغاز کرد ولی بهتر است با بکار گیری یک تبدیلی آن را به معادله ای منجر ساخت که در آن جمله مربوط به ضریب b حذف شود.

در مسأله بالا تبدیل تابع $u(x,t)=e^{\alpha x+\beta t}v(x,t)$ بکار می بریم و ضریب های α و β را چنان تعیین می کنیم که معادله دیفرانسیل روی تابع v به این صورت درآید:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (1)$$

وسپس مسأله را روی تابع v حل می کنیم

اولین کاری که انجام می دهیم مشتق های تابع u برحسب متغیرهای x و t را برحسب مشتق های v برحسب x و t حساب می کنیم و آنها را در معادله بالا جایگزین می کنیم:

$$u = e^{\alpha x+\beta t}v$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{\alpha x+\beta t}\frac{\partial v}{\partial t} + \beta e^{\alpha x+\beta t}v = e^{\alpha x+\beta t}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\beta v\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \underbrace{e^{\alpha x+\beta t}\frac{\partial v}{\partial x}}_{I} + \underbrace{\alpha e^{\alpha x+\beta t}v}_{II}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \underbrace{\left(e^{\alpha x+\beta t}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha e^{\alpha x+\beta t}\frac{\partial v}{\partial x}\right)}_{\text{مشتق } I \text{ نسبت به } x} + \underbrace{\left(\alpha e^{\alpha x+\beta t}\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha^2 e^{\alpha x+\beta t}v\right)}_{\text{مشتق } II \text{ نسبت به } x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{\alpha x+\beta t}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\alpha\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha^2 v\right)$$

حال $\frac{\partial u}{\partial t}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial u}{\partial x}$ را در معادله

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\frac{\partial u}{\partial x}$$

می بریم و طرفین معادله بر $e^{\alpha x+\beta t}$ تقسیم می کنیم (زیرا تمام جملات شامل این عبارت هستند) و بدست می آوریم:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \beta v = c\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\alpha\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha^2 v\right) - b\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha v\right)$$

و این معادله را مرتب می‌کنیم

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (2c\alpha - b)\frac{\partial v}{\partial x} + (c\alpha^2 - b\alpha - \beta)v$$

حال برای اینکه این معادله به این صورت درآید:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

باید ضریب های $\frac{\partial v}{\partial x}$ و v صفر شود (یعنی این جملات در معادله از بین بروند)

$$\frac{\partial v}{\partial x}\ \text{ضریب} :\quad 2c\alpha - b = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{b}{2c}}$$

$$v\ \text{ضریب} :\quad c\alpha^2 - b\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \beta = c\alpha^2 - b\alpha = c\left(\frac{b}{2c}\right)^2 - b\left(\frac{b}{2c}\right)$$

$$\beta = \frac{b^2}{4c} - \frac{b^2}{2c} \Rightarrow \boxed{\beta = -\frac{b^2}{4c}}$$

به این ترتیب ضریب های α و β بدست آمد و ارتباط بین دو تابع u و v کاملاً مشخص می‌شود:

$$u(x,t) = e^{\alpha x + \beta v} v(x,t)$$

$$(2)\quad u(x,t) = e^{\frac{b}{2c}x - \frac{b^2}{4c}t} v(x,t) \Rightarrow v(x,t) = e^{-\frac{b}{2c}x + \frac{b^2}{4c}t} u(x,t)$$

همچنین داریم:

$$x=0,\ v(0,t) = e^{\frac{b^2}{4c}t} \underbrace{u(0,t)}_{=0} = 0$$

$$x=l,\ v(l,t) = e^{-\frac{l}{2c} + \frac{b^2}{4c}t} \underbrace{u(l,t)}_{=0} = 0$$

$$t=0\quad v(x,0) = e^{-\frac{b}{2c}x} \underbrace{u(x,0)}_{f(x)} = e^{-\frac{b}{2c}x} f(x)$$

و بیان مسئله روی تابع v:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = c\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & 0<x<l,\ t>0 \\ v(0,t) = 0,\ v(l,t) = 0 & \\ v(x,0) = e^{-\frac{b}{2c}x} f(x) & 0<x<l \end{cases}$$

که این مسئله ساده انتشار است و عملیات حل را روی آن انجام می‌دهیم سپس جواب $v(x,t)$ بدست آمده را در رابطهٔ (2) قرار می‌دهیم تا تابع $u(x,t)$ مشخص شود.

مسئله (۵)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial x} & 0<x<l,\ t>0 \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0\ ;\ u(x,0) = e^{x} & \end{cases}$$

حل. در این مسأله $c=1$ ، $b=2$ و $f(x)=e^{x}$ ، بنابراین:

$$u(x,t)=e^{\frac{b}{2c}x-\frac{b^2}{4c}t}v(x,t) \Rightarrow u(x,t)=e^{x-t}v(x,t)$$

$$v(x,0)=e^{-\frac{b}{2c}x}f(x)=e^{-x}\times e^{x}=1$$

بنابراین روی تابع v این مسأله داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & 0<x<l,\ t>0 \\ v(0,t)=0,\ v(l,t)=0 \\ v(x,0)=1 \end{cases}$$

و تابع $v(x,t)=X(x)T(t)$ را در معادله می‌بریم پس از طی عملیات مربوط به مراحل I و II و III جواب نهائی این معادله بدست می‌آید

جواب نهائی:

$$(*)\quad v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

و با اعمال شرط $v(x,0)=1$ ، B_n که را بدست می‌آوریم:

$$\Rightarrow v(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x=1 \Rightarrow B_n=\frac{2}{l}\int_0^l \underbrace{(1)}_{f(x)}\times\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$=\frac{2}{l}\left(-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\right)\Big|_0^l=-\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)=\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

لذا:

$$\xrightarrow{(*)}\quad v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}e^{-\frac{n^2\pi^2t}{l^2}}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

و در نهایت داریم:

$$u(x,t)=e^{x-t}v(x,t)=\frac{2}{\pi}e^{x-t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{n}e^{-\frac{n^2\pi^2t}{l^2}}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

مسائل برای حل:

۲۱) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0<x<1,\ t>0 \\ u(0,t)=0,\ u(1,t)=0,\ u(x,0)=u_0(1-x) \end{cases}$$

۲۲) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0<x<\pi,\ t>0 \\ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0,\ u(x,0)=u_0\sin x \end{cases}$$

راهنمائی:
$u(x,t)=v(x,t)+Ax+B$

۲۳) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0<x<l\ ,\ t>0 \\ u(0,t)=0\ ,\ u(l,t)=u_1\ ;\ u(x,0)=u_0 \end{cases}$

*۲۴) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial u}{\partial x} & 0<x<\pi\ ,\ t>0 \\ u(0,t)=0\ ,\ u(\pi,t)=0\ ,\ u(x,0)=3e^{x}\sin x \end{cases}$

*۲۵) نشان دهید که معادلهٔ $\dfrac{\partial u}{\partial t}=c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+au$ ، با بکارگیری تبدیل تابع $u(x,t)=e^{\beta t}V(x,t)$ و انتخاب مناسب β را می‌توان به معادلهٔ $\dfrac{\partial V}{\partial t}=c\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ منجر ساخت ، با بکارگیری این تبدیل معادله زیر را حل کنید

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+au \quad 0<x<l\ ,\ t>0$$
$$u(0,t)=0\ ,\ u(l,t)=0\ ,\ u(x,0)=u_0$$

یادداشت‌ها:

(i) اگر $\dfrac{T'(t)}{cT(t)}=\dfrac{X''(x)}{X(x)}$ (۱) چرا $\dfrac{T'(t)}{cT(t)}=\dfrac{X''(x)}{X(x)}=K$ ؟ جواب

از طرفین (۱) یکبار نسبت به t و بار دیگر نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{T'(t)}{cT(t)}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{T'(t)}{cT(t)}\right)=\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{X''(x)}{X(x)}\right)}_{=0}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{T'(t)}{cT(t)}\right)=0$$
$$\Rightarrow \frac{T'(t)}{cT(t)}=c_1$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T'(t)}{cT(t)}\right)}_{=0}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{X''(x)}{X(x)}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{X''(x)}{X(x)}\right)\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{X''(x)}{X(x)}\right)=0\Rightarrow\frac{X''(x)}{X(x)}=c_2$$

وچون $\dfrac{T'(t)}{cT(t)}=\dfrac{X''(x)}{X(x)}$ است لذا $c_1=c_2$ و مقدار مشترک این ثابت‌ها را به K نشان می‌دهیم.

(ii) دیدیم که برای حل معادلات دیفرانسیل $\dfrac{T'(t)}{cT(t)}=\dfrac{X''(x)}{X(x)}=K$ ، K را منفی گرفتیم حال اگر $K>0$ و یا $K=0$ باشد چه اتفاقی می‌افتد؟

الف) $K>0$ می‌گیریم $K=\lambda^2$ آنگاه داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{T'(t)}{cT(t)}=\lambda^2 & (\alpha) \\ \dfrac{X''(x)}{X(x)}=\lambda^2 & (\beta) \end{cases}$$

جواب عمومی معادله (α): $T(t) = C_0 e^{c\lambda^2 t}$ و معادله (β): $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$

و جواب عمومی آن $X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$ در نتیجه:

$$u(x,t) = C_0 e^{c\lambda^2 t}(C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}) = (Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x})e^{c\lambda^2 t}$$

حال شرطهای مرزی $u(0,t)=0$ و $u(l,t)=0$ را روی این جوابها باید اعمال می‌کنیم:

$$(1)\quad u(0,t)=0 \xrightarrow{x=0} u(0,t) = (Ae^0 + Be^0)e^{c\lambda^2 t} = 0 \Rightarrow A+B=0$$

$$(2)\quad u(l,t)=0 \xrightarrow{x=l} u(l,t) = (Ae^{\lambda l} + Be^{-\lambda l})e^{c\lambda^2 t} = 0 \Rightarrow Ae^{\lambda l} + Be^{-\lambda l} = 0$$

از حل دستگاه $\begin{cases} A+B=0 \\ Ae^{\lambda l} + Be^{-\lambda l} = 0 \end{cases}$ با توجه به اینکه $\lambda > 0$ نتیجه می‌شود $A=0$ و $B=0$

پس $u(x,t) \equiv 0$ و به جواب پوچ می‌رسیم.

ب) $k=0$، آنگاه داریم:

$$\frac{T'(t)}{cT(t)} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} X''(x) = 0 \\ T'(t) = 0 \end{cases}$$

در نتیجه: $T(t) = C_0$ و $X(x) = C_1 x + C_2$ لذا:

$$u(x,t) = T(t)X(x) = Ax + B$$

و با اعمال شرطهای مرزی $u(0,t)=0$ و $u(l,t)$ روی این جوابها:

$$(1)\quad u(0,t)=0 \xrightarrow{x=0} u(0,t) = A\times 0 + B = 0 \Rightarrow B=0$$

$$(2)\quad u(l,t)=0 \xrightarrow{x=l} u(l,t) = Al + B = 0 \Rightarrow Al = 0 \Rightarrow A=0$$

لذا $u(x,t) = Ax + B \equiv 0$ و به جواب پوچ می‌رسیم.

(تذکر) گفتیم که اگر در معادله انتشار: $u(0,t)=a$ و $u(l,t)=b$ باشد ابتدا در معادله تبدیل تابع $u(x,t) = V(x,t) + Ax + B$ بکار می‌گیریم.

توجه کنید اگر $u(0,t)=0$ و $u(l,t)=b\neq 0$ و یا آنکه $u(0,t)=a\neq 0$ و $u(l,t)=0$ باشد باز هم همین تبدیل را بکار می‌گیریم.

درس تمام شد.

حل معادلهٔ ناهمگن انتشار

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x) \quad ; \quad 0<x<l,\ t>0$$

$u(0,t)=a$, $u(l,t)=b$, $t>0$

$u(x,0)=f(x)$ و $0<x<l$

برای حل معادله در آن تبدیل تابع : $\underline{u(x,t)=v(x,t)+y(x)}$ بکار می‌بریم و تابع $y(x)$ را چنان انتخاب می‌کنیم که مسأله روی تابع $v(x,t)$ به این صورت درآید :

$$\frac{\partial v}{\partial t}=c\frac{\partial^2 v}{\partial x} \quad ; \quad v(0,t)=0 \text{ و } v(l,t)=0$$

در ابتدا ; با بکارگیری تبدیل بالا معادله را روی تابع v می‌بریم

$$u(x,t)=v(x,t)+y(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t} \text{ و } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+y''(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t}=c\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+y''(x)\right)+F(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t}=c\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(cy''(x)+F(x))$$

برای رسیدن به هدف قرار می‌دهیم : $cy''(x)+F(x)=0$

و یا ; $y''(x)=-\frac{1}{c}F(x)$

با دو بار انتگرال‌گیری $y(x)$ به صورت $\underline{y(x)=g(x)+Ax+B}$ بدست می‌آید. پس تا اینجا داریم :

$$u(x,t)=v(x,t)+Ax+B+g(x)$$

حال ثابت‌های A و B را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که شرط‌های مرزی ترکیب روی تابع v ایجاد شود :

$$v(0,t)=0 \text{ و } v(l,t)=0$$

(i) $x=0 \Rightarrow u(0,t)=v(0,t)+g(0)+A\times 0+B$

$a=0+g(0)+B \Rightarrow \underline{B=a-g(0)}$

$$(ii)\ x=l \Rightarrow u(l,t)=v(l,t)+g(l)+Al+B$$

$$b=0+g(l)+Al+a-g(0)$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{l}\left(b-a+g(0)-g(l)\right)$$

لذا:

$$u(x,t)=v(x,t)+g(x)+\frac{1}{l}\left(b-a+g(0)-g(l)\right)x+a-g(0)$$

و بیان مسئله روی تابع v:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}=c\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad ; \quad 0<x<l\ ,\ t>0 \\ v(0,t)=0,\ v(l,t)=0 \ ;\ t>0 \\ v(x,0)=\underset{+u(x,0)}{f(x)}-g(x)+\frac{1}{l}\left(a-b+g(l)-g(0)\right)x+g(0)-a \end{cases}$$

مثال - حل معادله:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u_0\sin x \quad ; \quad 0<x<\pi\ ,\ t>0 \qquad (l=\pi)$$

$$u(0,t)=0\ ,\ u(\pi,t)=u_0 \ ;\ u(x,0)=\frac{u_0}{\pi}x+u_0$$

حل: می‌گیریم $u(x,t)=v(x,t)+Y(x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u_0\sin x \Longrightarrow \frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+Y''(x)+u_0\sin x$$

قرار می‌دهیم $Y''(x)+u_0\sin x=0$ لذا:

$$Y''=-u_0\sin x$$

$$\Rightarrow Y'=u_0\cos x+A \Rightarrow Y(x)=u_0\sin x+Ax+B$$

لذا داریم:

$$u(x,t)=v(x,t)+u_0\sin x+Ax+B$$

حال A و B را چنان تعیین می‌کنیم که

$$v(0,t)=v(\pi,t)=0$$

$$u(x,t)=V(x,t)+u_0\sin x+Ax+B$$

$$x=0\Rightarrow u(0,t)=V(0,t)+u_0\sin 0+A\times 0+B$$

$$0=0+B\Rightarrow B=0$$

$$x=\pi\Rightarrow u(\pi,t)=V(\pi,t)+u_0\sin\pi+A\pi+B$$

$$u_0=0+A\pi+0\Rightarrow A=\frac{u_0}{\pi}$$

لذا داریم :

$$u(x,t)=V(x,t)+u_0\sin x+\frac{u_0}{\pi}x$$

و بیان مسأله روی تابع V

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\ ,\quad 0<x<\pi\ ,\ t>0\\ V(0,t)=0\ ,\ V(\pi,t)=0\\ V(x,0)=u(x,0)-u_0\sin x-\dfrac{u_0}{\pi}x=\dfrac{u_0}{\pi}x+u_0-u_0\sin x-\dfrac{u_0}{\pi}x\\ V(x,0)=\underbrace{u_0-u_0\sin x}_{f(x)}\end{cases}$$

که این یک مسأله استاندارد است :

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-\frac{cn^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x\qquad c=1\ \text{و}\ l=\pi$$

پس از کنترل از مرحله III :

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-n^2t}\sin nx$$

اعمال شرط اولیه

$$V(x,0)=u_0-u_0\sin x$$

$$V(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin nx=u_0-u_0\sin x\qquad 0<x<\pi$$

توجه در اینجا کافیست که تابع $f_1(x)=u_0$ را در بازه $0<x<\pi$ به سری سینوسی فوریه بسط دهیم :

$$u_0=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\Rightarrow b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u_0\sin nx\,dx=\frac{2u_0}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$b_n=\frac{2u_0}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\Rightarrow B_1=b_1-u_0=\frac{4u_0}{\pi}-u_0$$

و $B_n=b_n\quad n\geq 2$ جواب مسأله :

$$u(x,t)=\left(\frac{4}{\pi}-1\right)u_0e^{-t}\sin x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2u_0}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)e^{-n^2t}\sin nx+u_0\sin x+\frac{u_0}{\pi}x$$

حل معادلهٔ ناهمگن انتشار وقتی که طرف دوم معادله تابعی از x و t باشد

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t); \quad 0<x<l \,,\, t>0 \quad (1)$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0 \,, \quad (2) \qquad u(x,0)=f(x) \quad (3)$$

برای حل این معادله، در ابتدا، برای آن جواب:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (4)$$

درنظر می‌گیریم به وضوح تابع (۴) در شرایط مرزی (۲) صدق می‌کند. دنباله توابع $\{u_n(t)\}_{n\geq 1}$ را چنان تعیین می‌کنیم که اولاً این تابع در معادله (۱) صدق کند، ثانیاً شرط اولیهٔ (۳) هم برای آن برقرار باشد.
بنابراین ابتدا، تابع (۴) را در معادلهٔ (۱) می‌بریم. قبل از آن تابع $F(x,t)$ را روی متغیر x دربارهٔ $0<x<l$، به سری سینوس - فوریه بسط می‌دهیم. با فرض:

$$F(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (5)$$

داریم:

$$b_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l F(z,t)\sin\frac{n\pi}{l}z \qquad (6)$$

حال تابع (۴) و هم چنین $F(x,t)$ برحسب سری فوریه (۵) در معادلهٔ (۱) می‌بریم:

$$(1)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(t)\sin\frac{n\pi}{l}x=c\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\right)\sin\frac{n\pi}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

یا:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n'(t)+\frac{n^2\pi^2}{l^2}u_n(t)\right)\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad \forall x \quad 0<x<l$$

لذا داریم:

$$u_n'(t)+\frac{n^2\pi^2}{l^2}u_n(t)=b_n(t) \;;\; n=1,2,3,\ldots \qquad (7)$$

روابط (۷) دنباله‌ای از معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول روی متغیر t می باشد ، که جواب عمومی آنها :

$$u_n(t) = e^{-\int \frac{n^2\pi^2}{l^2}dt}\left(\int b_n(t)\, e^{\int \frac{n^2\pi^2}{l^2}dt}\, dt + B_n\right)$$

$$= e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t}\left(\int b_n(t)\, e^{\frac{n^2\pi^2}{l^2}t}\, dt + B_n\right) = B_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t} + \phi_n(t) \quad (*)$$

(یادآوری $\quad y' + P(x)y = Q(x) \Rightarrow y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)\, e^{\int P(x)dx}\, dx + C\right)$)

لذا داریم :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\frac{n\pi}{l}x = \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t} + \phi_n(t)\right)\sin\frac{n\pi}{l}x}} \quad (8)$$

و در نهایت شرط اولیه (۲) $u(x,0) = f(x)$ را روی تابع (۸) اعمال می‌کنیم تا ضریب های B_n تعیین شود :

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n + \phi_n(0)\right)\sin\frac{n\pi}{l}x = f(x)$$

و از آنجا :

$$B_n + \phi_n(0) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\, dx \Rightarrow \underline{\underline{B_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\, dx - \phi_n(0)}}$$

و ضریب های B_n را در (۸) که جواب مسئله است می‌گذاریم .

توجه : $\quad (*)\ \phi_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t}\int b_n(t)\, e^{\frac{n^2\pi^2}{l^2}t}\, dt$

تعمیم مسئله بالا :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \quad , \quad 0<x<l \ , \ t>0 & (1) \\ u(0,t) = p(t) \quad , \quad u(l,t) = q(t) & (2) \\ u(x,0) = f(x) & (3) \end{cases}$$

حل : این مسئله را با بکارگیری تبدیل تابع

$$u(x,t) = v(x,t) + A(t)x + B(t)$$

به مسئله قبل منجر می سازیم یعنی توابع $A(t)$ و $B(t)$ را بگونه ای انتخاب می‌کنیم که برای تابع $v(x,t)$ داشته باشیم : $v(0,t) = v(l,t) = 0$

$$x=0 \Rightarrow u(0,t) = v(0,t) + A(t)\times 0 + B(t)$$

$$p(t) = 0 + B(t) \Rightarrow \underline{B(t) = p(t)}$$

$$x=l \Rightarrow u(l,t) = v(l,t) + A(t)l + B(t)$$

$$q(t) = 0 + A(t)l + p(t) \Rightarrow \underline{A(t) = \frac{q(t)-p(t)}{l}}$$

بنابراین :

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{q(t)-p(t)}{l}x + p(t)$$

و معادله روی تابع v :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{q'(t)-p'(t)}{l}x + p'(t) = c\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + F(x,t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = c\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \underbrace{\left(F(x,t) - \frac{q'(t)-p'(t)}{l}x - p'(t)\right)}_{=F_1(x,t)}$$

و بنابراین مسئله روی تابع v :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + F_1(x,t) \quad ; \quad 0<x<l \ , \ t>0$$

$$v(0,t) = 0 \ , \ v(l,t) = 0 \qquad t>0$$

$$v(x,0) = u(x,0) - \frac{q(0)-p(0)}{l}x - p(0) = \underbrace{f(x) - \frac{q(0)-p(0)}{l}x - p(0)}_{f_1(x)}$$

که این همان مسئله قبلی ولی روی تابع $v(x,t)$ است .

مثال (۱):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+xe^{-t}\ ;\quad 0<x<\pi,\ t>0$$

$$u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0\ ;\ u(x,0)=\alpha$$

حل:

$(l=\pi)$

$$xe^{-t}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(t)\sin nx$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xe^{-t}\sin nx\,dx=\frac{2e^{-t}}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{2e^{-t}}{n}(-1)^{n+1}$$

لذا داریم:

$$xe^{-t}=2e^{-t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

جواب مسأله را به صورت:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx$$

درنظر می‌گیریم؛

با بردن این تابع و هم‌چنین xe^{-t} بر حسب سری در معادله:

$$\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+xe^{-x}\Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(t)\sin nx=2\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)(-n^2\sin nx)+2e^{-t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n'(t)+2n^2u_n(t)\right)\sin nx=2e^{-t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

لذا داریم:

$$u_n'(t)+2n^2u_n(t)=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}e^{-t}\ ;\quad n=1,2,3,\dots$$

و جواب عمومی این معادلات:

$$u_n(t)=e^{-2n^2t}\left(\int\frac{2(-1)^{n+1}}{n}e^{-t}\cdot e^{2n^2t}\,dt+B_n\right)$$

$$=e^{-2n^2t}\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\times\frac{1}{2n^2-1}e^{2n^2t-t}+B_n\right)$$

و یا:

$$u_n(t)=B_ne^{-2n^2t}+\frac{2(-1)^{n+1}}{n(2n^2-1)}e^{-t}$$

وجواب مسئله نهایتاً :

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n e^{-2n^2t}+\frac{2(-1)^{n+1}}{n(2n^2-1)}e^{-t}\right)\sin nx \quad (*)$$

واکنون شرط اولیه : $u(x,0)=a$ را در این جواب اعمال می‌کنیم

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n+\frac{2(-1)^{n+1}}{n(2n^2-1)}\right)\sin nx=a \quad (=f(x))$$

واز آنجا :

$$B_n+\frac{2(-1)^{n+1}}{n(2n^2-1)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} a\sin\frac{n\pi}{l}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} a\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}a\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{2a}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

ودر نتیجه :

$$\underline{\underline{B_n=\frac{2a}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)-\frac{2(-1)^{n+1}}{n(2n^2-1)}}}$$

و B_n را در تابع $(*)$ می‌بریم :

مثال (۲) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cos t-x(\sin t+\cos t);\quad 0<x<1,\ t>0$$

$0<x<1$; $u(x,0)=x^2$; $t>0$, $u(1,t)=\cos t$, $u(0,t)=\sin t$

حل : در معادله تبدیل $u(x,t)=v(x,t)+A(t)x+B(t)$ ، بکار می‌بریم و $A(t)$ و $B(t)$ را بگونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $v(0,t)=v(1,t)=0$ شود .

$$\Rightarrow u(x,t)=v(x,t)+A(t)x+B(t)$$

$$x=0\Rightarrow u(0,t)=v(0,t)+A(t)\times 0+B(t)$$

$$\sin t=0+B(t)\Rightarrow \underline{B(t)=\sin t}$$

$$x=1\Rightarrow u(1,t)=v(1,t)+A(t)\times 1+B(t)$$

$$\cos t=0+A(t)+\sin t\Rightarrow \underline{A(t)=\cos t-\sin t}$$

لذا داریم :

$$\underline{\underline{u(x,t)=v(x,t)+(\cos t-\sin t)x+\sin t}}$$

ارتباط مشتقات دو تابع :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}+(-\sin t-\cos t)x+\cos t \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

و بیان مسأله روی تابع v :

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}-(\sin t+\cos t)x+\cos t}_{\frac{\partial u}{\partial t}} = \underset{\Downarrow}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}+\cos t - x(\sin t+\cos t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad ; \quad 0<x<1 \ , \ t>0 \\ v(0,t)=0 \ , \ v(1,t)=0 \quad t>0 \\ v(x,0)=u(x,0)-x = x^2-x=-x(1-x)=f_1(x) \end{cases}$$

و این یک مسأله ساده است که قبلاً روش حل آن بیان شده است.

جوابهای پایه‌ای این معادله پس از اعمال شرط‌های مرزی $v(0,t)=v(1,t)=0$ عبارتست از :

$$v(x,t)=B_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x = B_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x \quad (l=1)$$

و جواب معادلهٔ مربوط به تابع v

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x \qquad 0<x<1$$

و با اعمال شرط اولیهٔ

: $v(x,0)=x^2-x$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi x = x^2-x \Rightarrow B_n=\frac{2}{1}\int_0^1 (x^2-x)\sin n\pi x\, dx$$

$$\Rightarrow B_n=-\frac{4}{\pi^3 n^3}(1-(-1)^n) \Rightarrow v(x,t)=-\frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x$$

و جواب معادله اصلی : $t\geq 0$, $0\leq x\leq 1$ که

$$u(x,t)=(\cos t-\sin t)x+\sin t-\frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x$$

تمرین - حل معادلهٔ

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nt}}{n!}\sin nx \ ; \ t>0$$

$0<x<\pi$

تحت شرایط مرزی و اولیهٔ $u(0,t)=u(\pi,t)=u(x,0)=0$

جواب :

$$u(x,t)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{-nt}-e^{-n^2 t}}{n(n-1)n!}\sin nx + te^{-t}\sin x$$

حل مسأله: $\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ، $0<x<l$ ، $t>0$ (۱)

با شرایط مرزی: $u'_x(0,t)=0$ و $u'_x(l,t)=0$ (۲)

و شرط اولیه: $u(x,0)=f(x)$ ، $0<x<l$ (۳)

توجه کنید به تفاوت این مسأله با مسأله انتشار که قبلاً حل کرده‌ایم که شرایط مرزی $u(0,t)=u(l,t)=0$ با: $u'_x(0,t)=u'_x(l,t)=0$ جایگزین شده است.

حل: I - ابتدا جوابهای خصوصی معادله را که به صورت: $u(x,t)=X(x)T(t)$ می باشند بدست می آوریم با بردن این تابع در معادله و جداسازی متغیرها بدست می آوریم:

$$\frac{T'(t)}{cT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = K$$

دراینجا هم می توان نشان داد که به ازای $K>0$ و با اعمال شرایط مرزی (۲) به جواب پوچ $u(x,t)\equiv 0$ می رسیم، ولی به ازای $K=0$ چنین نیست

الف $K=0$

$$\begin{cases} X''(x)=0 \\ T'(t)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} X(x)=C_1x+C_2 \\ T(t)=C_3 \end{array} \Rightarrow u(x,t)=A_0+B_0x$$

و با اعمال شرط مرزی (۲) روی این جواب:

$$u'_x(x,t)=B_0 \Rightarrow u'_x(0,t)=u'_x(l,t)=B_0=0 \Rightarrow B_0=0$$

لذا: $\underline{\underline{u(x,t)=A_0}}$

ب $K<0$ و $K=-\lambda^2 \Rightarrow \frac{T'(t)}{cT(t)}=-\lambda^2$ ، $\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(t)=C_3e^{-\lambda^2 t} \\ X(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x \end{cases} \Rightarrow u(x,t)=e^{-\lambda^2 t}(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)$$

و با اعمال شرطهای مرزی (۲) روی این جواب:

$$u'_x(x,t) = e^{-\lambda^2 t}(-A\lambda \sin\lambda x + B\lambda \cos\lambda x)$$

(i) $u'_x(0,t)=0$

$$u'_x(0,t) = e^{-\lambda^2 t}(0 + B\lambda) = 0 \Rightarrow B = 0$$

(ii) $u'_x(l,t)=0$

$$u'_x(l,t) = e^{-\lambda^2 t}(-A\lambda \sin\lambda l + 0) = 0 \Rightarrow A\lambda \sin\lambda l = 0$$

$$A \neq 0,\ \lambda \neq 0 \Rightarrow \sin\lambda l = 0 \Rightarrow \lambda l = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{l}$$

بنابراین جوابهای پایه‌ای به ازای $K=-\lambda^2<0$ به این صورت بیان می‌شود

$$u(x,t) = e^{-\lambda^2 t}(A\cos\lambda l) = A\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

و یا:

$$u(x,t) = A_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

و جمع تمام جوابهای پایه‌ای به عنوان جواب نهائی مسئله:

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t}\cos\frac{n\pi}{l}x \qquad (*)$$

و در نهایت با اعمال شرط اولیه:

$$u(x,0) = f(x) \qquad 0<x<l$$

$$\Rightarrow u(x,0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi}{l}x = f(x) \qquad 0<x<l$$

این رابطه بیانگر بسط نیم دامنه تابع $f(x)$ به سری کسینوسی فوریه در بازه $(0,l)$ است و داریم:

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx\ ,\quad A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx\ ,\quad n=1,2,3,\ldots$$

توسط این انتگرال‌ها ضرایب A_0 و A_1 و A_2 و ... را بدست آورده و در تابع $(*)$ می‌گذاریم.

توجه کنید به ازای $0<x<l$: آنگاه:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx\ ,\quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

مثال : $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu$ و $0<x<\pi\,,\ t>0$

$u'_x(0,t)=0$ و $u'_x(\pi,t)=0 \qquad t>0$

$u(x,0)=\cos 4x \qquad 0<x<\pi$

حل - هرچند که می‌توان این معادله را با تبدیل تابع $u(x,t)=e^{\beta x}v(x,t)$ به معادلهٔ : $\dfrac{\partial v}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ منجر ساخت و سپس این معادله را حل کرد . می‌شود که حل مسئله را روی معادله اصلی انجام داد .

$$u(x,t)=X(x)T(t) \Rightarrow X(x)T'(t)=aX''(x)T(t)+bX(x)T(t)$$

$$\Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)}=a\frac{X''(x)}{X(x)}+b \Rightarrow \frac{1}{a}\left(\frac{T'(t)}{T(t)}-b\right)=\frac{X''(x)}{X(x)}=K$$

الف - $K=0$

$$\begin{cases} \dfrac{T'(t)}{T(t)}-b=0 \Rightarrow \dfrac{T'(t)}{T(t)}=b \Rightarrow T(t)=c_0e^{bt} \\ X''(x)=0 \Rightarrow X(x)=c_1x+c_2 \end{cases} \Rightarrow u(x,t)=(B_0x+A_0)e^{bt}$$

و اعمال شرط‌های مرزی $u'_x(0,t)=u'_x(\pi,t)=0$ روی این جواب

$$u'_x(x,t)=B_0e^{bt} \Rightarrow u'_x(0,t)=u'_x(\pi,t)=B_0e^{bt}=0 \Rightarrow B_0=0$$

لذا :

$$\underline{\underline{u(x,t)=A_0e^{bt}}}$$

ب - $K=-\lambda^2<0$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{T'(t)}{T(t)}-b\right)=-\lambda^2 \Rightarrow \dfrac{T'(t)}{T(t)}=-a\lambda^2+b \\ \dfrac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2 \Rightarrow X''(x)+\lambda^2X(x)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(t)=c_0e^{(b-a\lambda^2)t} \\ X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x \end{cases}$$

و جوابهای پایه‌ای در این حالت :

$$u(x,t)=e^{(b-a\lambda^2)t}(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)$$

و با اعمال شرط‌های مرزی $u'_x(0,t)=u'_x(l,t)=0$ بدست می‌آوریم $B=0$ و $\lambda=\dfrac{n\pi}{l}$. لذا :

$$\underline{\underline{u(x,t)=A_ne^{\left(b-\frac{an^2\pi^2}{l^2}\right)t}\cos\frac{n\pi}{l}x \qquad n=1,2,3,\dots}}$$

وجواب نهائی مسئله

$$u(x,t)=A_0 e^{bt}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{(b-\frac{an^2\pi^2}{l^2})t}\cos\frac{n\pi}{l}x \qquad (l=\pi)$$

$$u(x,t)=e^{bt}\left(A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-an^2t}\cos nx\right)$$

واعمال شرط اولیه

$$u(x,0)=\cos^4 x$$

ولی :

$$\cos^4 x=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

لذا :

$$u(x,0)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

$$u(x,0)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos nx=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

بنابراین :

$$\Rightarrow A_0=\frac{3}{8},\quad A_2=\frac{1}{2},\quad A_4=\frac{1}{8}\;;\; A_1=A_3=A_5=A_6=A_7=\dots=0$$

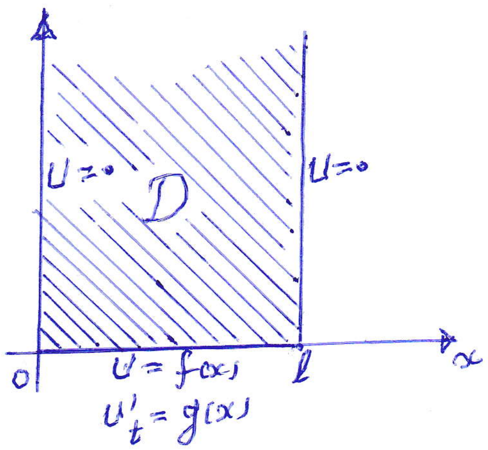
وجواب مسئله :

$$u(x,t)=e^{bt}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}e^{-4at}\cos 2x+\frac{1}{8}e^{-16at}\cos 4x\right)$$

برای کراندار بودن این تابع لازم است که :

$$b\leq 0$$

حل معادله موج در ناحیه $0<x<l$ و $t>0$



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ;\ 0<x<l\ ,\ t>0 \quad (1)$$

$$u(0,t)=0 \quad \text{و} \quad u(l,t)=0\ ;\ t>0 \quad (2)$$

$$\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u'_t(x,0)=g(x) \end{cases} ;\ 0<x<l \quad (3)$$

مراحل حل این معادله عیناً مانند معادله انتشار است با این تفاوت که معادله دیفرانسیل مربوط به تابع $T(t)$ از رسته دوم است و پس از جمع جوابهای پایه‌ای معادله به عنوان جواب مسأله دو مجموعه از ضرایب با اعمال شرایط اولیه (۳) محاسبه می‌شوند.

I - تعیین جوابهای خصوصی معادله به فرم $u(x,t)=X(x)T(t)$:

$$\Rightarrow X(x)T''(t)=c^2X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''(t)}{c^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=K=-\lambda^2$$

(توجه در این معادله هم وقتی که $K>0$ و $K=0$ درنظر بگیریم پس از اعمال شرطهای اولیه (۲) روی جوابهای خصوصی به جواب پوچ $u(x,t)\equiv 0$ می‌رسیم)

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda^2X(x)=0 \\ T''(t)+c^2\lambda^2T(t)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x \\ T(t)=c_3\cos c\lambda t+c_4\sin c\lambda t \end{array}$$

$$u(x,t)=(c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x)(c_3\cos c\lambda t+c_4\sin c\lambda t) \quad (4)$$

II - اعمال شرطهای مرزی (۲) روی توابع (۴)

$$(i)\ u(0,t)=0$$
$$u(0,t)=(c_1+c_2\times 0)(c_3\cos c\lambda t+c_4\sin c\lambda t)=0 \Rightarrow c_1=0$$

$$(ii)\ u(l,t)=0$$
$$u(l,t)=c_2\sin\lambda l\,(c_3\cos c\lambda t+c_4\sin c\lambda t)=0 \Rightarrow \sin\lambda l=0$$

و

$$\lambda l=n\pi \Rightarrow \lambda=\frac{n\pi}{l}\ ,\ n=1,2,3,\cdots$$

$$u(x,t)=\left(A_n\cos\frac{cn\pi}{l}t+B_n\sin\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\ ;\ n=1,2,3,\ldots \quad (5)$$

III - جمع جوابهای (۵) به عنوان جواب مسأله:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{cn\pi}{l}t+B_n\sin\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (6)$$

IV - اعمال شرطهای اولیه

$u(x,0)=f(x)$, $u'_t(x,0)=g(x)$ روی تابع (۶)

(i) : $u(x,0)=f(x)$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x=f(x)$$

و از آنجا:

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad (7)$$

(ii) : $u'_t(x,0)=g(x)$

$$u'_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{cn\pi}{l}A_n\sin\frac{cn\pi}{l}t+\frac{cn\pi}{l}B_n\cos\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

داریم:

$$u'_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{cn\pi}{l}B_n\right)\sin\frac{n\pi}{l}x=g(x)$$

لذا:

$$\frac{cn\pi}{l}B_n=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

یا:

$$B_n=\frac{2}{cn\pi}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad (8)$$

توسط انتگرالهای (۷) و (۸) ضریبهای A_n و B_n را محاسبه و مقادیر آنها را در تابع (۶) قرار می‌دهیم.

در حالت خاصی که $u'_t(x,0)=g(x)\equiv 0$ ، آنگاه: $B_n=0$
و اگر $u(x,0)=f(x)\equiv 0$ باشد، آنگاه: $A_n=0$

توجه:

- اگر شرطهای مرزی در معادله موج $u'_x(0,t)=0$ و $u'_x(l,t)=0$ باشد، همانند وضعیت مشابه در معادله انتشار، حالت K صفر منجر به جواب $u(x,t)=A_0$ می‌شود که در جمع جوابهای پایه‌ای باید در نظر گرفت.

- همان تبدیلات $u(x,t) \longrightarrow v(x,t)$ که برای حل معادله انتشار با شرط‌های مرزی غیر صفر یا غیر همگن بکار می‌رود عیناً برای حل معادله موج هم بکار می‌رود

الف -

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; ; \; 0<x<l \; , \; t>0 \\ u(0,t)=a \; و \; u(l,t)=b \quad t>0 \\ u(x,0)=f(x) \, , \; u'_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

می‌گیریم $u(x,t)=v(x,t)+Ax+B$ و A و B را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $v(0,t)=v(l,t)=0$ در اینجا:

لذا: $A=\dfrac{b-a}{l}$ و $B=a$

$u(x,t)=v(x,t)+\dfrac{b-a}{l}x+a$ و بیان مسئله روی تابع v

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \; ; \; 0<x<l \, , \; t>0 \\ v(0,t)=v(l,t)=0 \\ v(x,0)=f(x)-\dfrac{b-a}{l}x-a \; و \; v'_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

ب -

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x) \; ; \; 0<x<l \, , \; t>0 \\ u(0,t)=a \, , \; u(l,t)=b \quad t>0 \\ u(x,0)=f(x) \; و \; u'_t(x,0)=g(x) \quad 0<x<l \end{cases}$$

می‌گیریم

$$u(x,t)=v(x,t)+Y(x)$$

معادله روی تابع v:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+Y''(x)\right)+F(x)$$

قرار می‌دهیم $c^2Y''(x)+F(x)=0$ یا

$Y''=-\dfrac{1}{c^2}F(x)$ و با دو بار انتگرال‌گیری:

لذا: $Y(x)=\Phi(x)+Ax+B$

$$u(x,t)=v(x,t)+\Phi(x)+Ax+B$$

حال A و B را چنان تعیین می‌کنیم که $v(0,t)=v(l,t)=0$ شود.

پ -

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t) \quad ; \quad 0<x<l \ , \ t>0$$

$$u(0,t)=0 \ , \ u(l,t)=0 \quad ; \quad t>0$$

$$u(x,0)=f(x) \ , \ u'_t(x,0)=g(x) \quad 0<x<l$$

تابع : $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$ به عنوان جواب معادله در نظر می‌گیریم. این تابع در شرط‌های مرزی $u(0,t)=0$ و $u(l,t)=0$ صدق می‌کند. دنباله توابع : $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ را چنان تعیین می‌کنیم که این تابع در معادله و در شرط‌های اولیه : $u(x,0)=f(x)$ و $u'_t(x,0)=g(x)$ صدق کند.

با بردن این تابع در معادله و بیان تابع $F(x,t)$ برحسب سری سینوسی :

$\Leftarrow \ F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$ و $b_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l F(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$ بدست می‌آوریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{u_n''(t)+\frac{c^2n^2\pi^2}{l^2}u_n(t)\right\}\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

و از اینجا :

$$u_n''(t)+\frac{c^2n^2\pi^2}{l^2}u_n(t)=b_n(t) \quad ; \quad n=1,2,3,4,\dots$$

و جواب‌های این معادلات دیفرانسیل :

$$u_n(t)=A_n\cos\frac{cn\pi}{l}t+B_n\sin\frac{cn\pi}{l}t+\varphi_n(t)$$

که تابع $\bar{u}_n(t)=A_n\cos\frac{cn\pi}{l}t+B_n\sin\frac{cn\pi}{l}t$ جواب عمومی معادلهٔ همگن : $u_n''(t)+\frac{c^2n^2\pi^2}{l^2}u_n=0$ و تابع $\bar{\bar{u}}_n(t)=\varphi_n(t)$ یک جواب خصوصی با طرف دوم است. تا اینجا جواب مسئله :

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{cn\pi}{l}t+B_n\sin\frac{cn\pi}{l}t+\varphi_n(t)\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

است. نهایتاً با اعمال شرط‌های اولیهٔ $u(x,0)=f(x)$ و $u'_t(x,0)=g(x)$

ضرایب A_n و B_n که از روابط توابع $f(x)$ و $g(x)$ بدست می‌آیند.

ب ـ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \quad ; \quad 0 < x < l \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = p(t) \ , \ u(l,t) = q(t) \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \ , \ u'_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

می‌گیریم:

$$u(x,t) = v(x,t) + A(t)x + B(t)$$

و $A(t)$ و $B(t)$ را بگونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $v(0,t) = v(l,t) = 0$ شود و این مسأله روی تابع v به مسأله بند ب منجر می‌سازیم.

مثال‌ها:

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ ; \ 0 < x < \pi \ , \ t > 0$

$u(0,t) = 0 \ , \ u(\pi,t) = \pi$

$u(x,0) = x + \sin x \ , \ u'_t(x,0) = 0$

حل در معادله تبدیل تابع $u(x,t) = v(x,t) + Ax + B$ بکار می‌بریم. معادله روی تابع v خواهد شد:

$\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$. ثابت‌های A و B را چنان تعیین می‌کنیم که

$$v(0,t) = v(\pi,t) = 0$$

$x = 0 \Rightarrow u(0,t) = v(0,t) + A \times 0 + B \Rightarrow 0 = 0 + B \Rightarrow B = 0$

$x = \pi \Rightarrow u(\pi,t) = v(\pi,t) + A\pi + B \Rightarrow \pi = 0 + A\pi + 0 \Rightarrow A = 1$

لذا داریم: $u(x,t) = v(x,t) + x$ و مسأله روی تابع v:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad ; \quad 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ v(0,t) = 0 \ , \ v(\pi,t) = 0 \\ v(x,0) = u(x,0) - x = x + \sin x - x \Rightarrow v(x,0) = \sin x \\ v'_t(x,0) = u'_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

I ـ تعیین جوابهای خصوصی $v(x,t) = X(x)T(t)$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \\ T(t) = c_3 \cos \lambda t + c_4 \sin \lambda t \end{cases}$$

$$v(x,t) = (c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x)(c_3 \cos \lambda t + c_4 \sin \lambda t)$$

II - اعمال شرط های مرزی $v(0,t) = v(\pi,t) = 0$

(i) $v(0,t) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

(ii) $v(\pi,t) = 0 \Rightarrow c_2 \sin \lambda \pi = 0 \quad (c_2 \neq 0) \Rightarrow \lambda \pi = n\pi \Rightarrow \lambda = n$

$n \in \mathbb{N}$

پس داریم:

$$v(x,t) = c_2 (c_3 \cos nt + c_4 \sin nt) \sin nx$$

$$v(x,t) = (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin nx \quad ; n = 1, 2, 3, \ldots$$

III - جمع جوابهای پایه ای به عنوان جواب نهائی:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B \sin nt) \sin nx$$

IV - اعمال شرط های اولیه

$v'_t(x,0) = 0$ و $v(x,0) = \sin x$

(i) $v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = \sin x \Rightarrow A_1 = 1, \; A_2 = A_3 = A_4 = \cdots = 0$

(ii) $v'_t(x,0) = 0$

$$v'_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-A_n n \sin nt + B_n n \cos nt) \sin nx$$

$$v'_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \sin nx = 0 \qquad B_n = 0 \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

و جواب مسئله دوم که تابع v:

$$v(x,t) = \cos t \sin x$$

و جواب نهائی مسئله:

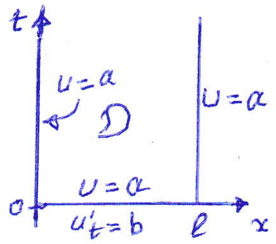
$$U(x,t) = x + \cos t \sin x$$

مثال (۲) حل مسأله : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ؛ $0<x<l \,,\ t>0$

$u(0,t)=u(l,t)=u(x,0)=a$ و $u'_t(x,0)=b$

حل ـ تبدیل تابع $u(x,t)=V(x,t)+Ax+B$ بکار می‌بریم

با این تبدیل معادله تغییر نمی‌کند ، A و B را چنان تعیین می‌کنیم که $V(0,t)=V(l,t)=0$ شود .



$$x=0 \Rightarrow u(0,t)=V(0,t)+A\times 0+B$$
$$a=0+B \Rightarrow B=a$$

$$x=l \Rightarrow u(l,t)=V(l,t)+Al+B$$
$$a=0+Al+a \Rightarrow A=0 \Rightarrow u(x,t)=V(x,t)+a$$

و بیان مسأله روی تابع V :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \ ; \quad 0<x<l \,,\ t>0$$

$V(0,t)=0$ و $V(l,t)=0$

$$V(x,0)=u(x,0)-a=a-a=0$$

$$V'_t(x,t)=u'_t(x,t) \Longrightarrow V'_t(x,0)=u'_t(x,0)=b$$

و حل مسأله روی تابع V :

$$I-\ V(x,t)=X(x)T(t) \Rightarrow X(x)T''(t)=c^2X''(x)T(t)$$

$$\Rightarrow \frac{T''(t)}{c^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=K=-\lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} X''(x)+\lambda^2X(x)=0 \\ T''(t)+c^2\lambda^2T(t)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x \\ T(t)=c_3\cos c\lambda t+c_4\sin c\lambda t \end{cases}$$

$$V(x,t)=(c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x)(c_3\cos c\lambda t+c_4\sin c\lambda t)$$

II ـ اعمال شرط‌های مرزی $V(0,t)=V(l,t)=0$

(i) $v(0,t)=0 \Rightarrow c_1(c_3\cos c\lambda t + c_4 \sin c\lambda t)=0 \Rightarrow c_1=0$

(ii) $v(l,t)=0 \Rightarrow c_2 \sin\lambda l\,(c_3\cos c\lambda t + c_4\sin c\lambda t)=0 \;,\; c_2\neq 0$

$$\Rightarrow \sin\lambda l=0 \Rightarrow \lambda l = n\pi \Rightarrow \lambda=\frac{n\pi}{l} \,,\, n\in N$$

پس تا اینجا:

$$v(x,t)=\left(A_n\cos\frac{cn\pi t}{l}+B_n\sin\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

توجه:

در همین مرحله می‌توان شرط اولیه $v(x,0)=0$ را روی جواب‌های پایه‌ای اعمال کرد.

(iii) $v(x,0)=A_n\sin\frac{n\pi}{l}x=0\Rightarrow A_n=0$

لذا:

$$v(x,t)=B_n\sin\frac{cn\pi}{l}t\,\sin\frac{n\pi}{l}x \;;\; n=1,2,3,4,\dots$$

III - وجمع جواب‌های پایه‌ای به عنوان جواب نهائی:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{cn\pi}{l}t\,\sin\frac{n\pi}{l}x$$

IV - اعمال شرط اولیه $v_t(x,0)=b$:

$$v'(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{cn\pi}{l}\cos\frac{cn\pi}{l}t\,\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$v'(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{cn\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x=b=g(x)$$

واز آنجا:

$$\frac{cn\pi}{l}B_n=\frac{2}{l}\int_0^l b\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2b}{l}\left(-\frac{l}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l$$

$$=\frac{2b}{n\pi}(1-(-1)^n)\Rightarrow B_n=\frac{2bl}{cn^2\pi^2}(1-(-1)^n)$$

لذا:

$$v(x,t)=\frac{2bl}{c\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2}\sin\frac{cn\pi}{l}t\,\sin\frac{n\pi}{l}x$$

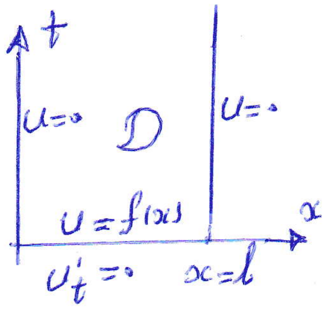
و

$$u(x,t)=a+\frac{2bl}{c\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2}\sin\frac{cn\pi}{l}t\,\sin\frac{n\pi}{l}x$$

مثال (۳) جواب معادله زیر را برحسب تابعی از f بیان کنید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 u \quad ; \quad 0<x<l, \; t>0$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad ; \quad u(x,0) = f(x) \; , \; u'_t(x,0) = 0$$



حل- ابتدا، جوابهای پایه‌ای معادله را که به صورت $u(x,t) = X(x)T(t)$ هستند پیدا می‌کنیم. با بردن تابع در معادله:

$$\Rightarrow X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) - b^2 X(x)T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} - b^2 \Rightarrow \frac{1}{c^2}\left(\frac{T''(t)}{T(t)} + b^2\right) = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 & \Rightarrow X(x) = c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x \\ T''(t) + (b^2 + c^2\lambda^2)T(t) = 0 & \Rightarrow T(t) = c_3 \cos\sqrt{c^2\lambda^2+b^2}\, t + c_4 \sin\sqrt{c^2\lambda^2+b^2}\, t \end{cases}$$

و جوابهای پایه‌ای معادله:

$$u(x,t) = (c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x)(c_3 \cos\sqrt{c^2\lambda^2+b^2}\, t + c_4 \sin\sqrt{c^2\lambda^2+b^2}\, t)$$

حال شرطهای مرزی $u(0,t) = u(l,t) = 0$ و $u'_t(x,0) = 0$ را روی جوابهای پایه‌ای اعمال می‌کنیم:

$$(i) \; u(0,t) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \qquad (ii) \; u(l,t) = 0 \Rightarrow \sin\lambda l = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{l}$$

پس تا اینجا:

$$u(x,t) = \left(A \cos\sqrt{\frac{c^2 n^2\pi^2}{l^2} + b^2}\, t + B \sin\sqrt{\frac{c^2 n^2\pi^2}{l^2} + b^2}\, t\right) \sin\frac{n\pi}{l} x$$

$$(iii) \; u'_t(x,0) = 0$$

$$u'_t(x,t) = \sqrt{\frac{c^2 n^2\pi^2}{l^2} + b^2}\left(-A \sin\sqrt{\frac{c^2 n^2\pi^2}{l^2} + b^2}\, t + B \cos\sqrt{\frac{c^2 n^2\pi^2}{l^2} + b^2}\, t\right) \sin\frac{n\pi}{l} x$$

$$u'_t(x,0) = \sqrt{\frac{c^2 n^2\pi^2}{l^2} + b^2} \cdot B \sin\frac{n\pi}{l} x = 0 \Rightarrow B = 0$$

لذا: $u(x,t) = A_n \cos\sqrt{\frac{c^2 n^2\pi^2}{l^2} + b^2}\, t \sin\frac{n\pi}{l} x$ و جواب نهایی مسئله:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\sqrt{\frac{c^2 n^2\pi^2}{l^2} + b^2}\, t\right) \sin\frac{n\pi}{l} x \quad (*)$$

در نهایت شرط اولیه $u(x,0) = f(x)$ را روی تابع $(*)$ اعمال می‌کنیم

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x = f(x) \qquad 0<x<l$$

واز اینجا:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(z)\sin\frac{n\pi}{l}z\,dz$$

و با بردن A_n در فرمول (*) جواب مسئله برحسب تابع f بدست می‌آید

$$u(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^l f(z)\sin\frac{n\pi}{l}z\,dz\right)\cos\left(\sqrt{\frac{c^2\pi^2n^2}{l^2}+b^2}\,t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

مثال (٤)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t\sin x \quad ; \quad 0<x<\pi \ ,\ t>0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad ; \quad u(x,0) = u'_t(x,0) = 0$$

حل - جواب معادله را به صورت:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx \quad (*)$$ درنظر می‌گیریم

این تابع در شرط‌های مرزی $u(0,t)=0$ و $u(\pi,t)=0$ صدق می‌کند.

دنباله توابع $\{u_n(t)\}_{n\geq 1}$ را آن چنان تعیین می‌کنیم که تابع بالا در معادله و در شرایط اولیهٔ $u(x,0) = u'_t(x,0) = 0$ نیز صدق کند

با بردن تابع (*) در معادله:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t)\sin nx - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)(-n^2\sin nx) = t\sin x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n''(t) + n^2 u_n(t)\right)\sin nx = t\sin x$$

لذا داریم:

برای $n=1$: $\quad u_1''(t) + u_1(t) = t \quad (\alpha)$

و به ازای $n\geq 2$: $\quad u_n''(t) + n^2 u_n(t) = 0 \quad (\beta)$

جواب عمومی معادلهٔ (α): $\quad u_1(t) = A_1\cos t + B_1\sin t + t$

وجواب عمومی معادلهٔ (β): $\quad u_n(t) = A_n\cos nt + B_n\sin nt$

پس جواب معادله تا اینجا می‌شود :

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nt+B_n\sin nt)\sin nx+t\sin x$$

حال شرایط اولیه $u(x,0)=u'_t(x,0)=0$ را روی این تابع اعمال می‌کنیم

(i) $u(x,0)=0$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\times 1+0)\sin nx+0\times\sin x=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin nx=0 \Rightarrow A_n=0 \quad n=1,2,3,\dots$$

لذا :

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin nt\sin nx+t\sin x$$

(ii) $u'_t(x,0)=0$

$$u'_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}nB_n\cos nt\sin nx+\sin x$$

$$u'_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}nB_n\sin nx+\sin x=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}nB_n\sin nx=-\sin x \Rightarrow 1\times B_1=-1 \Rightarrow B_1=-1$$

[illegible] $nB_n=0 \Rightarrow B_n=0 : n\geq 2$

لذا :

$$u(x,t)=B_1\sin t\sin x+t\sin x$$
$$=-\sin t\sin x+t\sin x=(t-\sin t)\sin x$$

مثال ۵) (مسأله ۷)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=h \;;\quad 0<x<l \,,\, t>0$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0 \,,\quad t\geq 0$$

$$u(x,0)=0 \,,\quad u'_t(x,0)=0$$

حل: در معادله تبدیل تابع $u(x,t)=v(x,t)+y(x)$ بکار می‌بریم تا روی تابع v معادله همگن شود و ضمناً داشته باشیم:

$$v(0,t)=v(l,t)=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=h \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-c^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+y''(x)\right)=h$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=c^2y''(x)+h$$

لذا: $c^2y''(x)+h=0$ یعنی $y''(x)=-\frac{h}{c^2}$ و از آنجا $y(x)=-\frac{h}{2c^2}x^2+Ax+B$. حال A و B را برای اینکه $v(0,t)=v(l,t)=0$ شود بدست می‌آوریم:

$$u(x,t)=v(x,t)-\frac{h}{2c^2}x^2+Ax+B$$

$$x=0\Rightarrow u(0,t)=v(0,t)+A\times 0+B\Rightarrow 0=0+B\Rightarrow \underline{B=0}$$

$$x=l\Rightarrow u(l,t)=v(l,t)-\frac{h}{2c^2}l^2+Al+0$$

$$\Rightarrow 0=0-\frac{hl^2}{2c^2}+Al=0\Rightarrow A=\frac{hl}{2c^2}$$

بنابراین:

$$\underline{\underline{u(x,t)=v(x,t)-\frac{hx^2}{2c^2}+\frac{hl}{2c^2}x}}$$

و بیان مسأله روی تابع v

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\;;\quad 0<x<l \,,\, t>0$$

$$v(0,t)=0 \,,\; v(l,t)=0 \quad t>0$$

$$v(x,0)=\underbrace{u(x,0)}_{=0}+\frac{hx^2}{2c^2}-\frac{hl}{2c^2}x=\underline{\frac{h}{2c^2}(x^2-lx)}$$

$$v'_t(x,t)=u'_t(x,t)\Rightarrow v'_t(x,0)=u'_t(x,0)\Rightarrow \underline{v'_t(x,0)=0}$$

جوابهای پایه ای این معادله پس از اعمال شرط های مرزی $V(0,t)=0$ و $V(l,t)=0$ چنین است:

$$V(x,t)=\left(A_n\cos\frac{cn\pi}{l}t+B_n\sin\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \ ; \ n=1,2,3,\dots$$

و با اعمال شرط اولیه $V'_t(x,0)=0$ روی این توابع بدست می آوریم $B_n=0$

لذا:

$$V(x,t)=A_n\cos\frac{cn\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x$$

و جواب گسترده روی تابع V :

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{cn\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x$$

اکنون شرط اولیه $V(x,0)=\frac{h}{2c^2}(x^2-lx)$ را روی این تابع اعمال می کنیم تا B_n ها بدست آید.

$$V(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\frac{h}{2c^2}(x^2-lx)$$

و از آنجا:

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{h}{2c^2}(x^2-lx)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$=\frac{h}{c^2l}\int_0^l\underbrace{(x^2-lx)}_{U}\underbrace{\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx}_{dV}=\frac{h}{c^2l}\Big[\underbrace{(x^2-lx)\left(-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\right)\Big|_0^l}_{=0}$$

$$-\int_0^l\left(-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\right)\underbrace{(2x-l)\,dx}_{dU}\Big]=\frac{h}{n\pi c^2}\int_0^l\underbrace{(2x-l)}_{U}\underbrace{\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx}_{dV}$$

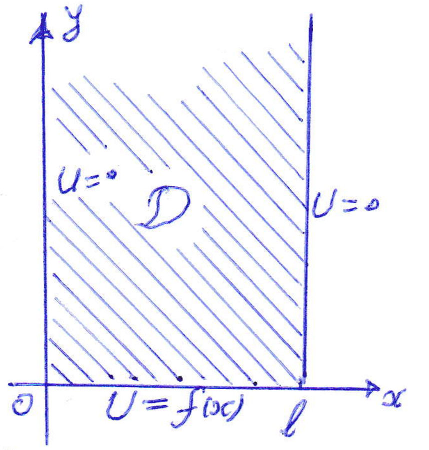
$$=\frac{h}{n\pi c^2}\Big[\underbrace{(2x-l)\left(\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\Big|_0^l}_{=0}-\int_0^l\left(\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}x\right)(2\,dx)\Big]$$

$$=\frac{h}{n\pi c^2}\times\frac{2l}{n\pi}\times\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l=\frac{2hl^2}{n^3\pi^3c^2}\left((-1)^n-1\right)=-\frac{2(1-(-1)^n)hl^2}{n^3\pi^3c^2}$$

$$u(x,t)=\frac{hl}{2c^2}x-\frac{hx^2}{2c^2}+V(x,t)=\frac{hx}{2c^2}(l-x)-\frac{2l^2h}{c^2\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\cos\frac{cn\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$u(x,t)=\frac{hx(l-x)}{2c^2}-\frac{4l^2h}{c^2\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\cos\frac{c(2n-1)\pi}{l}t\sin\frac{(2n-1)\pi}{l}x$$

حل معادلهٔ لاپلاس در نوار $0<x<l$ و $y\geq 0$



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ ;\quad 0<x<l\ ,\ y>0$$

$u(0,y)=0$ و $u(l,y)=0$ $\quad y>0$

$u(x,0)=f(x)$ $\quad 0<x<l$ و $|u(x,y)|\leq M$

توضیح دربارهٔ شرط $|u(x,y)|\leq M$:

در کاربرد معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی تابع u معرف یک کمیت فیزیکی است که مقدار آن محدود است، یعنی بی اندازه افزایش نمی‌یابد. بنابراین در حل مسائل فیزیکی که منجر به معادلهٔ دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی می‌شود، علاوه بر معرفی شرایط مرزی و اولیهٔ مسأله باید کراندار بودن تابع جواب را لحاظ کرد.

در مسائل انتشار و موج در صورت مسأله کراندار بودن تابع u را مطرح نکردیم، زیرا در این دو مسأله جوابهای پایه‌ای به ترتیب عبارتند از

$$u_n(x,t)=\left(A_n\cos\frac{cn\pi}{l}t+B_n\sin\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\ ,\quad u(x,t)=B_n e^{-\frac{n^2\pi^2c^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

که هر دوی این توابع کراندار هستند یعنی وقتی که $0<x<l$ ، و $t\to\infty$ مقادیر این دو تابع محدود است، ولی در معادلهٔ لاپلاس چنین نیست در زیر که جوابهای پایه‌ای معادله لاپلاس:

$$u(x,t)=\left(A_n e^{\frac{n\pi}{l}y}+B_n e^{-\frac{n\pi}{l}y}\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$ بدست می‌آید

و ملاحظه می‌شود که $\lim_{y\to\infty} e^{\frac{n\pi}{l}y}\to\infty$ ، پس برای آنکه مقدار u بی اندازه افزایش نیابد باید $A_n=0$ منظور نمود؛
کراندار بودن تابع u را با شرط $|u(x,y)|\leq M$ نشان می‌دهیم.

حال برمی‌گردیم به حل مسأله

I - ابتدا جوابهای پایه‌ای معادله را که به فرم $u(x,y)=X(x)Y(y)$ هستند تعیین می‌کنیم.

$$\Rightarrow X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0\Rightarrow\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}=0\Rightarrow\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x)+\lambda^2 X(x)=0 \\ Y''(y)-\lambda^2 Y(y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x \\ Y(y)=c_3 e^{\lambda y}+c_4 e^{-\lambda y} \end{array}$$

لذا:

$$u(x,y)=(c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x)(c_3 e^{\lambda y}+c_4 e^{-\lambda y})$$

II- اعمال شرط‌های مرزی $u(0,y)=u(l,y)=0$ و شرط کراندار بودن جواب‌های پایه‌ای:

$$(i)\quad u(0,y)=0 \Rightarrow c_1(c_3 e^{\lambda y}+c_4 e^{-\lambda y})=0 \Rightarrow c_1=0$$

$$(ii)\quad u(l,y)=0 \Rightarrow c_2\sin\lambda l(c_3 e^{\lambda y}+c_4 e^{-\lambda y})=0,\ c_2\neq 0 \Rightarrow \sin\lambda l=0 \Rightarrow \lambda=\frac{n\pi}{l}$$

$n\in N$

پس تابع‌ها:

$$u(x,y)=(A_n e^{\frac{n\pi}{l}y}+B_n e^{-\frac{n\pi}{l}y})\sin\frac{n\pi}{l}x;\ n=1,2,3,\dots$$

$(iii)\quad \underline{|u(x,y)|\leq M}$ با توجه به اینکه $\lim_{y\to\infty} e^{\frac{n\pi}{l}y}\to\infty$ ، لذا $A_n=0$

پس:

$$u(x,y)=B_n e^{-\frac{n\pi}{l}y}\sin\frac{n\pi}{l}x;\quad n=1,2,3,\dots$$

III - و جواب مسئله:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{n\pi}{l}y}\sin\frac{n\pi}{l}x \quad (*)$$

IV - اعمال شرط مرزی $u(x,0)=f(x)$ روی تابع $(*)$

$$\Rightarrow u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\frac{n\pi}{l}x=f(x) \Rightarrow B_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

توسط این انتگرال B_n ها محاسبه و سپس آنها را در تابع $(*)$ قرار می‌دهیم.

توجه:

- همان روش‌هایی که برای حل تعمیم‌های معادله انتشار و معادله موج بکار بردیم، تعمیم‌های متناظر معادله لاپلاس نیز حل می‌شود.

الف -

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ ;\quad 0<x<l\ ,\ y>0$$

$u(0,y)=a\ ,\ u(l,y)=b\quad y>0$

$u(x,0)=f(x)\ ;\ |u(x,y)|\leq M$

می‌گیریم: $u(x,y)=v(x,y)+Ax+B$

ب -

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x) \ ; \ 0<x<l \ , \ y>0 \\ u(0,y)=a \ , \ u(l,y)=b \ ; \ y>0 \\ u(x,0)=f(x) \ ; \ |u(x,y)| \leq M \end{cases}$$

می‌گیریم

$$u(x,y)=V(x,y)+Y(x)$$

پ -

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x,y) \ ; \ 0<x<l \ , \ y>0 \\ u(0,y)=0 \ , \ u(l,y)=b \ ; \ y>0 \\ u(x,0)=f(x) \ ; \ |u(x,y)| \leq M \end{cases}$$

تابع $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin \frac{n\pi}{l} x$ را به عنوان جواب معادله در نظر می‌گیریم.

ت -

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x,y) \ ; \ 0<x<l \ , \ y>0 \\ u(0,y)=p(y) \ , \ u(l,y)=q(y) \quad y>0 \\ u(x,0)=f(x) \ ; \ |u(x,y)| \leq M \end{cases}$$

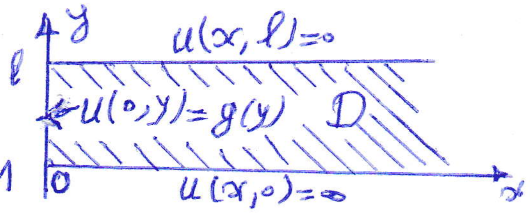
می‌گیریم:

$$u(x,y)=V(x,y)+A(y)x+B(y)$$

و $A(y)$ و $B(y)$ را چنان تعیین می‌کنیم که $V(0,y)=V(l,y)=0$ و مسئله به مسئله ذکر شده در بند پ منجر شود.

- با توجه به تقارن موجود در معادله لاپلاس نسبت به متغیرهای x و y می‌توان با تعویض نقش x و y ($X(x) \leftrightarrow Y(y)$; $a \leftrightarrow b$) مثلاً مسئله زیر را هم حل کرد

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ ; \ x>0 \ , \ 0<y<l \\ u(x,0)=0 \ , \ u(x,l)=0 \quad x>0 \\ u(0,y)=f(y) \ ; \ 0<y<l \ , \ |u| \leq M \end{cases}$$



برای حل این مسئله می‌گیریم $\dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = -\dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$ و نهایتاً به جواب زیر می‌رسیم

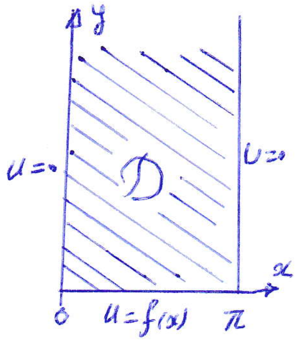
$$\Rightarrow u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{n\pi}{l}x} \sin \frac{n\pi}{l} y \ ; \ B_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi}{l} y \, dy$$

مثال (۱) حل معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ ، $0<x<\pi$ و $y>0$ تحت شرط های مرزی:

$$u(x,0)=\begin{cases} u_0 x ; & 0\le x\le \frac{\pi}{2} \\ u_0(\pi-x) ; & \frac{\pi}{2}\le x\le \pi \end{cases} = f(x)$$

و $u(0,y)=u(\pi,y)=0$ و شرط کراندار بودن جواب ($|u(x,y)|\le M$).

حل - I : تعیین جوابهای پایه ای :



$$\Rightarrow u(x,y)=X(x)Y(y) \Rightarrow X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0$$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}=0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=K=-\lambda^2$$

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda^2 X(x)=0 \\ Y''(y)-\lambda^2 Y(y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x \\ Y(y)=c_3 e^{\lambda y}+c_4 e^{-\lambda y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,y)=(c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x)(c_3 e^{\lambda y}+c_4 e^{-\lambda y})$$

II - اعمال شرط های مرزی : $u(0,y)=u(\pi,y)=0$ و $|u(x,y)|\le M$

$(i): u(0,y)=0 \Rightarrow c_1=0$

$(ii): u(\pi,y)=0 \Rightarrow c_2\sin\lambda\pi=0 \quad c_2\neq 0 \Rightarrow \sin\lambda\pi=0$

$$\Rightarrow \lambda\pi=n\pi \Rightarrow \lambda=n \quad n=1,2,3,\dots$$

$$u(x,y)=c_2\sin nx\,(c_3 e^{ny}+c_4 e^{-ny})=(Ae^{ny}+Be^{-ny})\sin nx$$

با توجه به اینکه $\lim_{y\to\infty} e^{ny}\to\infty$ ، لذا برای کراندار بودن جواب بایستی $A=0$. لذا :

$$u(x,y)=B_n e^{-ny}\sin nx \ , \ n=1,2,3,\dots$$

III - جمع جوابهای پایه ای معادله به عنوان جواب نهائی مسئله :

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-ny}\sin nx \qquad (*)$$

IV - اعمال شرط مرزی $u(x,0)=f(x)$ روی تابع $(*)$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx = f(x) \qquad 0 \le x \le \pi$$

و از آنجا :

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_0\, x\sin nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} u_0(\pi-x)\sin nx\,dx\right]$$

$$=\frac{2u_0}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx\right]$$

$$=\frac{2u_0}{\pi}\Big[x\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)dx+$$

$$+(\pi-x)\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)(-dx)\Big]$$

$$B_n=\frac{2u_0}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]$$

$$=\frac{2u_0}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\Rightarrow B_n=\frac{4u_0}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

و جواب مسأله :

$$u(x,t)=\frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\,e^{-ny}\sin nx$$

مثال (۲)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad 0<x<\pi \text{ و } y>0$$

$|u(x,y)|\le M$ ؛ $u(x,0)=u_0(\sin x+\cos x)^2$ و $u(0,y)=u_0$ ، $u(\pi,y)=u_0$

حل - در معادله تبدیل تابع $u(x,y)=v(x,y)+Ax+B$ بکار می بریم و A و B را چنان تعیین می کنیم که $v(0,y)=v(\pi,y)=0$ شود. البته با این تبدیل معادله تغییر نمی کند.

$$\Rightarrow u(x,y)=v(x,y)+Ax+B$$

$$x=0\Rightarrow u(0,y)=v(x,y)+A\times 0+B\Rightarrow u_0=0+B\Rightarrow B=u_0$$

$$x=\pi\Rightarrow u(\pi,y)=v(\pi,y)+A\pi+B\Rightarrow u_0=0+A\pi+u_0\Rightarrow A=0$$

لذا : $u(x,y)=v(x,y)+u_0$

و بیان مسأله روی تابع v :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \qquad 0<x<\pi\ ,\ y>0 \\ v(0,y)=v(\pi,y)=0 \quad \text{و} \quad |v(x,y)|\leq M \\ v(x,0)=u(x,0)-u_0=u_0(\sin x+\cos x)^2-u_0 \end{cases}$$

$$=u_0(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{=1}+2\sin x\cos x-1)=u_0\sin 2x$$

و حل مسأله روی تابع v :

I : $v(x,y)=X(x)Y(y)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda^2$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x \\ Y(y)=c_3e^{\lambda y}+c_4e^{-\lambda y} \end{matrix} \Rightarrow u(x,y)=(c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x)(c_3e^{\lambda y}+c_4e^{-\lambda y})$$

II : اعمال شرط های مرزی $u=0$ و شرط کراندار بودن جواب :

$$(i)\ v(0,y)=0 \Rightarrow c_1=0 \quad \text{و} \quad (ii)\ v(\pi,y)=0 \Rightarrow \sin\lambda\pi=0 \Rightarrow \lambda=n \quad n\in N$$

$$(iii)\ |v(x,y)|\leq M \Rightarrow c_3=0 \Rightarrow \underline{v(x,y)=B_n e^{-ny}\sin nx}$$

III - جمع جوابهای پایه ای به عنوان جواب نهائی

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-ny}\sin nx \qquad (*)$$

IV - اعمال شرط مرزی $v(x,0)=f(x)$ برازای $f(x)=u_0\sin 2x$ روی تابع $(*)$

$$v(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin nx=u_0\sin 2x \Rightarrow \begin{cases} B_2=u_0 \\ B_n=0 \quad n\neq 2 \end{cases}$$

و جواب مسأله :

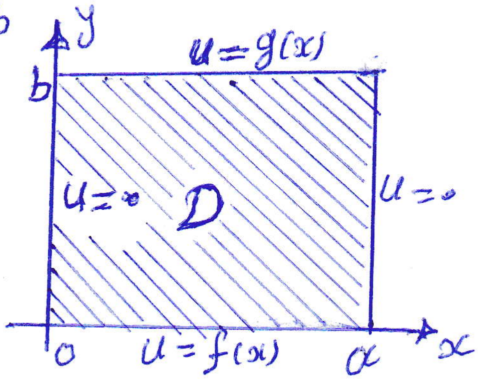
$$u(x,y)=v(x,y)+u_0=u_0e^{-2y}\sin 2x+u_0=\underline{u_0(1+e^{-2y}\sin 2x)}$$

حل معادله لاپلاس در سطح مستطیل $0<x<a$ و $0<y<b$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \;;\; 0<x<a \text{ و } 0<y<b$$

$u(0,y)=0\ ,\ u(a,y)=0 \;;\; 0<y<b$

$u(x,0)=f(x)$ و $u(x,b)=g(x) \;;\; 0<x<a$



حل این مسأله همانند حل معادله لاپلاس روی نوار $0<x<l$ و $y>0$ است با این تفاوت با توجه به اینکه در مسأله تغییرات x و y محدود است لذا جوابهای پایه‌ای معادله کراندار می‌باشند و نیازی به اعمال این شرط نمی‌باشد و بجای آن شرط $u(x,b)=g(x)$ داریم که روی جمع جوابهای پایه‌ای اعمال می‌شود.

$$\text{I}: u(x,y)=X(x)Y(y) \Longrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda^2$$

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda^2X(x)=0 \\ Y''(y)-\lambda^2Y(y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x \\ Y(y)=c_3e^{\lambda y}+c_4e^{-\lambda y} \end{cases}$$

$$u(x,y)=(c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x)(c_3e^{\lambda y}+c_4e^{-\lambda y})$$

$$\text{II}: u(0,y)=0 \Rightarrow c_1=0$$

$$u(a,y)=0 \Rightarrow c_2\sin\lambda a=0 \quad c_2\neq 0 \quad \sin\lambda a=0 \Rightarrow \lambda=\frac{n\pi}{a} \;;\; n\in\mathbb{N}$$

بنابراین:

$$u(x,y)=(A_ne^{\frac{n\pi}{a}y}+B_ne^{-\frac{n\pi}{a}y})\sin\frac{n\pi}{a}x \;;\; n=1,2,3,\dots$$

$$\text{III}: u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_ne^{\frac{n\pi}{a}y}+B_ne^{-\frac{n\pi}{a}y})\sin\frac{n\pi}{a}x \quad (*)$$ جواب مسأله

IV - و برای محاسبه ضرایب A_n و B_n شرط‌های مرزی $u(x,0)=f(x)$ و $u(x,b)=g(x)$ را روی تابع (*) اعمال می‌کنیم و

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)\sin\frac{n\pi}{a}x=f(x) \quad , \quad 0<x<a$$

و از آنجا:

$$A_n+B_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx \qquad (1)$$

$$u(x,b)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{n\pi b}{a}}+B_n e^{-\frac{n\pi b}{a}}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x=g(x)$$

که نتیجه می‌شود:

$$A_n e^{\frac{n\pi b}{a}}+B_n e^{-\frac{n\pi b}{a}}=\frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx \qquad (2)$$

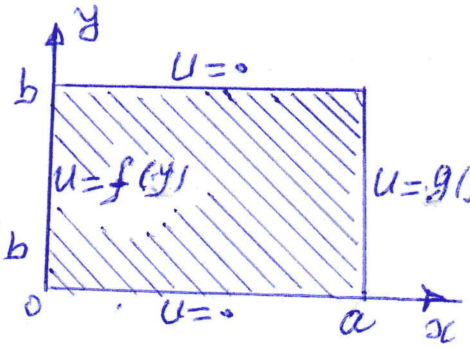
روابط (1) و (2) به منزله یک دستگاه معادلات روی ضرایب A_n و B_n می‌باشد. از حل این دستگاه A_n و B_n محاسبه و آنها را در تابع (*) قرار می‌دهیم.

توجه: با توجه به تقارن موجود در معادله لاپلاس (نسبت به متغیرهای x و y) می‌توان با تعویض نقش x و y ($X(x)\leftrightarrow Y(y)$ و $b\leftrightarrow a$)، عملیات بالا را برای حل مسئله زیر بکار برد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad ; \quad 0<x<a \text{ و } 0<y<b$$

$$u(x,0)=0 \text{ و } u(x,b)=0 \quad ; \quad 0<x<a$$

$$u(0,y)=f(y) \text{ و } u(a,y)=g(y) \quad ; \quad 0<y<b$$



فرمول‌های متناظر برای این مسئله عبارتند از:

جداسازی متغیرها:
$$\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2$$

جوابهای پایه‌ای:

$$u(x,y) = (C_1 \cos\lambda y + C_2 \sin\lambda y)(C_3 e^{\lambda x} + C_4 e^{-\lambda x})$$

و پس از اعمال شرط‌های مرزی $u(x,0)=0$ و $u(x,b)=0$

بدست می‌آوریم: $C_1=0$ و $\lambda = \frac{n\pi}{b}$: جوابهای پایه‌ای

$$u(x,y) = \left(A_n e^{\frac{n\pi}{b}x} + B_n e^{-\frac{n\pi}{b}x}\right)\sin\frac{n\pi}{b}y \quad ; \quad n=1,2,3,4,\dots$$

و جواب نهائی:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{n\pi}{b}x} + B_n e^{-\frac{n\pi}{b}x}\right)\sin\frac{n\pi}{b}y$$

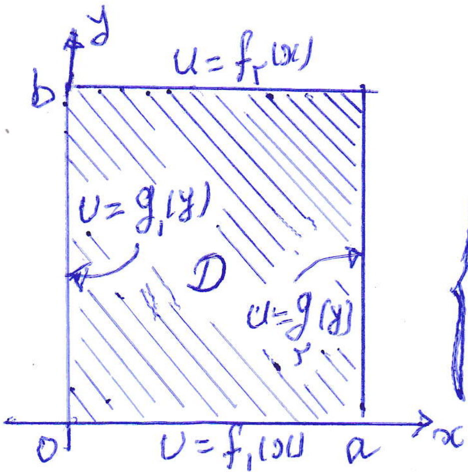
و با اعمال شرط‌های مرزی: $u(0,y)=f(y)$ و $u(a,y)=g(y)$

روی این تابع ضریب‌های A_n و B_n بدست می‌آیند، بطوریکه

$$A_n + B_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy$$

$$A_n e^{\frac{n\pi a}{b}} + B_n e^{-\frac{n\pi a}{b}} = \frac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy$$

حل مسأله:



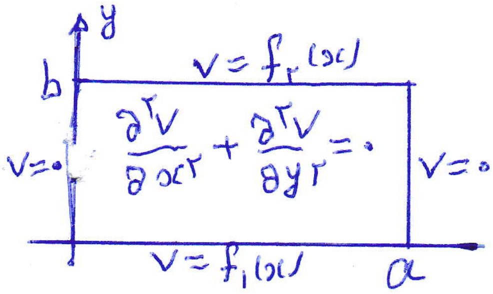
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ ; \quad 0<x<a \ , \ 0<y<b \\ u(x,0)=f_1(x) \ , \ u(x,b)=f_2(x) \\ u(0,y)=g_1(y) \ , \ u(a,y)=g_2(y) \end{cases}$$

حل می‌کنیم:

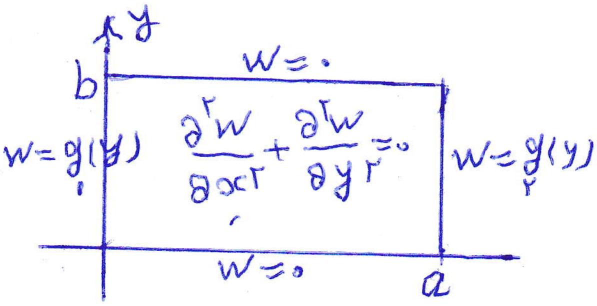
$$u(x,y) = V(x,y) + W(x,y)$$

بطوریکه توابع $V(x,y)$ و $W(x,y)$ جواب هر یک از مسائل فوق‌اند که شرح حل آنها در بالا ارائه شد.

$$I:\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\\ v(0,y)=0 \text{ و } v(a,y)=0\\ v(x,0)=f_1(x) \text{ و } v(x,b)=f_2(x)\end{cases}$$



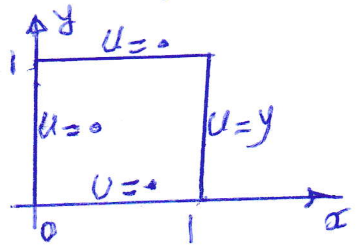
$$II:\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0\\ w(x,0)=0 \text{ و } w(x,b)=0\\ w(0,y)=g_1(y) \text{ و } w(a,y)=g_2(y)\end{cases}$$



مثال (۱) حل معادله:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad 0<x<1,\quad 0<y<1$$

$$u(0,x)=u(1,x)=u(0,y)=0 \text{ و } u(1,y)=y$$



I- $u(x,y)=X(x)Y(y)$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}=0 \Rightarrow \frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2$$

$$\begin{cases}Y''(y)+\lambda^2 Y(y)=0\\ X''(x)-\lambda^2 X(x)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l}Y(y)=C_1\cos\lambda y+C_2\sin\lambda y\\ X(x)=C_3e^{\lambda x}+C_4e^{-\lambda x}\end{array}$$

$$u(x,y)=(C_1\cos\lambda y+C_2\sin\lambda y)(C_3e^{\lambda x}+C_4e^{-\lambda x})$$

II- اعمال شرط‌های مرزی
$u(x,0)=u(x,1)=0$:

(i) $u(x,0)=0$

$$u(x,0)=C_1(C_3e^{\lambda x}+C_4e^{-\lambda x})=0 \Rightarrow C_1=0$$

(ii) $u(x,1)=0$

$$u(x,1)=C_2\sin\lambda\times 1\,(C_3e^{\lambda x}+C_4e^{-\lambda x})=0 \Rightarrow \sin\lambda=0 \Rightarrow \lambda=n\pi$$

$n=1,2,3,\dots$

لذا:

$$u(x,y)=(A_ne^{n\pi x}+B_ne^{-n\pi x})\sin n\pi y$$

III- و جواب مسئله تا اینجا:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_ne^{n\pi x}+B_ne^{-n\pi x})\sin n\pi y$$

IV - اعمال شرط‌های مرزی: $u(0,y)=0$ و $u(1,y)=y$

(i) $u(0,y)=0$

$$x=0\ ,\ u(0,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)\sin n\pi y=0 \Longrightarrow A_n+B_n=0$$

(ii) $u(1,y)=y$ ، $0<y<1$

$$x=1\ ,\ u(1,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{n\pi}+B_n e^{-n\pi})\sin n\pi y=y$$

و از آنجا:

$$A_n e^{n\pi}+B_n e^{-n\pi}=\frac{2}{l}\int_0^l \underbrace{y}_{f(y)}\sin\frac{n\pi}{l}y\,dy=2\int_0^1 y\sin n\pi y\,dy=$$

$$=2\Big[y\big(-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi y\big)\Big|_0^1-\underbrace{\int_0^1\big(-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi y\big)dy}_{=0}\Big]=-\frac{2}{n\pi}\cos n\pi$$

لذا داریم:

$$\begin{cases}A_n+B_n=0\\ A_n e^{n\pi}+B_n e^{-n\pi}=\dfrac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\end{cases}\Rightarrow A_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi(e^{n\pi}-e^{-n\pi})}$$

$$B_n=-\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi(e^{n\pi}-e^{-n\pi})}$$

و جواب مسئله:

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(e^{n\pi x}-e^{-n\pi x})}{n(e^{n\pi}-e^{-n\pi})}\sin n\pi y$$

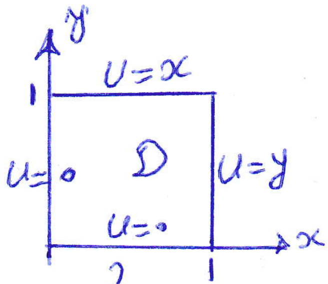
و یا:

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sinh n\pi x\,\sin n\pi y}{\sinh n\pi}$$

مثال (۲) حل معادله:

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ ، $0<x<1$ ، $0<y<1$ تحت شرایط مرزی:

$$\begin{cases}u(0,x)=u(y,0)=0\\ u(x,1)=x \text{ و } u(1,y)=y\end{cases}$$



حل - این مسئله را به دو مسئله تفکیک می‌کنیم (که یکی از مسائل، مثال (۱) الف) با توجه به تقارن موجود در شرط‌های مرزی و بکارگیری نتیجه مثال قبل جواب مسئله عبارتست از:

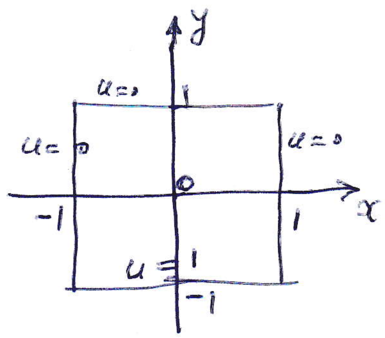
$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sinh n\pi}\left\{\sinh n\pi x\sin n\pi y+\sinh n\pi y\sin n\pi x\right\}.$$

حل مسأله دیریکله در مربع:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad -1<x<1 \ , \ -1<y<1$$

$$u(1,y)=u(-1,y)=0 \qquad -1\le y\le 1$$

$$u(x,1)=0 \ , \ u(x,-1)=1 \qquad -1<x<1$$



حل:

تفکیک متغیر

$$u(x,y)=X(x)\,Y(y)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} X''(x)+\lambda^2 X(x)=0 \\ Y''(y)-\lambda^2 Y(y)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x \\ Y(y)=c_3e^{\lambda y}+c_4e^{-\lambda y} \end{cases} \Rightarrow u(x,y)=(c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x)(c_3e^{\lambda y}+c_4e^{-\lambda y})$$

رعایت شرایط مرزی همگن

1) $u(x,1)=0 \qquad (c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x)(c_3e^{\lambda}+c_4e^{-\lambda})=0$

$$c_3e^{\lambda}+c_4e^{-\lambda}=0 \Rightarrow c_4=-c_3e^{2\lambda}$$

$$u(x,y)=(c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x)\,c_3\,(e^{\lambda y}-e^{2\lambda}\cdot e^{-\lambda y})$$

$$=(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)(e^{\lambda y}-e^{\lambda+(1-y)\lambda}) \qquad c_1c_3=A \ , \ c_2c_3=B$$

$$=(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)\,e^{\lambda}(e^{\lambda y-\lambda}-e^{(1-y)\lambda})$$

$$=-2e^{\lambda}(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)\left(\frac{e^{\lambda(1-y)}-e^{-\lambda(1-y)}}{2}\right)$$

$$u(x,y)=(a\cos\lambda x+b\sin\lambda x)\sinh\lambda(1-y) \qquad -2e^{\lambda}A=a \ , \ -2e^{\lambda}B=b$$

2) $u(1,y)=0 \Rightarrow (a\cos\lambda+b\sin\lambda)\sinh\lambda(1-y)=0 \Rightarrow \begin{cases} a\cos\lambda+b\sin\lambda=0 \\ a\cos\lambda-b\sin\lambda=0 \end{cases}$

3) $u(-1,y)=0 \Rightarrow (a\cos(-\lambda)+b\sin(-\lambda))\sinh\lambda(1-y)=0 \Rightarrow$

از این معادلات نتیجه می‌شود که:

$a\cos\lambda=0$ و $b\sin\lambda=0$

ضمناً a و b هم زمان صفر نمی‌شوند و همچنین $\cos\lambda$ و $\sin\lambda$ هم هم زمان صفر نمی‌شوند

لذا داریم

الف) $\begin{cases} b=0 \\ \cos\lambda=0 \end{cases}$ یا ب) $\begin{cases} a=0 \\ \sin\lambda=0 \end{cases}$

حال هر دو حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم:

الف) $b=0$ $\cos\lambda=0$ پس $\lambda=(2n-1)\frac{\pi}{2}$ $n=1,2,3,\dots$

جوابها باید

$$u_n(x,y)=a_n\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}x\,\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}(2n-1)(1-y)$$

و جواب شامل

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\pi x\,\operatorname{sh}\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\pi(1-y)$$

و با اعمال شرط مرزی غیرهمگن $u(x,-1)=1$ ، a_n ها محاسبه می‌شوند

$$u(x,-1)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\pi x\,\operatorname{sh}(2n-1)\pi=1 \qquad -1<x<1$$

برای محاسبه ضرایب a_m طرفین این سری را در $\cos\left(m-\tfrac{1}{2}\right)\pi x$ ضرب می‌کنیم و سپس در فاصله $-1<x<1$ از طرفین آن انتگرال می‌گیریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\operatorname{sh}(2n-1)\pi\int_{-1}^{1}\cos\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\pi x\cos\left(m-\tfrac{1}{2}\right)\pi x\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\cos\left(m-\tfrac{1}{2}\right)\pi x\,dx=\frac{1}{\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi}\sin\left(m-\tfrac{1}{2}\right)\pi x\Big|_{-1}^{1}$$

$$m=1,2,3,4,\dots \qquad =\frac{2}{(2m-1)\pi}\Big[\underbrace{\sin\left(m-\tfrac{1}{2}\right)\pi+\sin\left(m-\tfrac{1}{2}\right)\pi}_{=(-1)^{m+1}}\Big]=\frac{4(-1)^{m+1}}{(2m-1)\pi}$$

از طرف دیگر: طبق خاصیت تعامد توابع مثلثاتی

$$\int_{-1}^{1}\cos\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\pi x\cos\left(m-\tfrac{1}{2}\right)\pi x=\begin{cases}0 & m\neq n\\ =\int_{-1}^{1}\cos^2\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi x\,dx=1 & n=m\end{cases}$$

پس:

$$a_m\operatorname{sh}(2m-1)\pi\times 1=\frac{4(-1)^{m+1}}{\pi(2m-1)}\Rightarrow a_n=\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)\operatorname{sh}(2n-1)\pi}$$

$$u(x,y)=4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\,\operatorname{sh}\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi(1-y)}{\pi(2n-1)\operatorname{sh}(2n-1)\pi}$$

ثانیاً : $a=0$ ، $\sin\lambda=0$ پس $\lambda=n\pi$ ، $n=1,2,3,\dots$

جوابهای پایه‌ای

$$u_n(x,y)=b_n\sin n\pi x\,\sinh n\pi(1-y)$$

و جواب مسأله :

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\pi x\,\sinh n(1-y)\pi$$

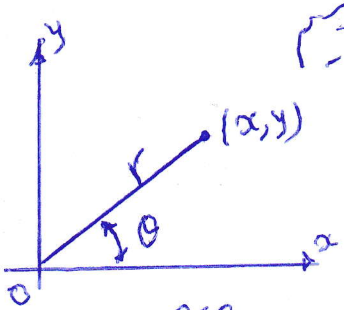
و اعمال شرط مرزی $u(x,-1)=1$

$$1=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\pi x\,\sinh 2n\pi \qquad -1<x<1$$

این تساوی غیرممکن است زیرا طرف چپ در بازهٔ $-1<x<1$ تابعی زوج است در حالیکه طرف راست در بازهٔ $(-1,1)$ تابعی فرد است.
پس حالت (ب) نمی‌تواند به جواب مسأله منجر شود.

حل معادلهٔ لاپلاس درون دایره $x^2+y^2=a^2$

برای حل معادلهٔ لاپلاس در ناحیه $D: x^2+y^2<a^2$ ، آن را به مختصات قطبی می‌بریم ، یعنی معادله را روی متغیرهای (r,θ) می‌نویسیم زیرا اولاً قلمرو حل به صورت ساده $D: r<a$ نوشته می‌شود ، ثانیاً روی مرز قلمرو حل متغیر r ثابت است $(r=a)$



$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

پس در قدم اول مشتق‌های جزئی $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ را برحسب مشتق‌های جزئی تابع U برحسب متغیرهای r و θ می‌نویسیم. ابزار این کار قاعده زنجیره‌ای مشتق‌های جزئی است که حساب دیفرانسیل توابع چند متغیره ارائه می‌شود

اگر:

$U=F(\xi,\eta)$

و

$\xi=f(x,y)$

$\eta=g(x,y)$

آنگاه داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x}=\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\times\dfrac{\partial \xi}{\partial x}+\dfrac{\partial U}{\partial \eta}\times\dfrac{\partial \eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y}=\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\times\dfrac{\partial \xi}{\partial y}+\dfrac{\partial U}{\partial \eta}\times\dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{cases}$$

در اینجا: $\xi=r$ و $\eta=\theta$ لذا:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x}=\dfrac{\partial U}{\partial r}\times\dfrac{\partial r}{\partial x}+\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial x} & (1) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y}=\dfrac{\partial U}{\partial r}\times\dfrac{\partial r}{\partial y}+\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial y} & (2) \end{cases}$$

چهار مشتق $\frac{\partial r}{\partial x}$ ، $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ ، $\frac{\partial r}{\partial y}$ و $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ از روی ارتباط (x,y) و (r,θ) قابل محاسبه‌اند از روابط $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$

نتیجه می‌شود

و داریم $\theta = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} \; (= g(x,y))$ و $r = \sqrt{x^2+y^2} \; (= f(x,y))$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta \,, & \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{-\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2} = -\dfrac{y}{x^2+y^2} = -\dfrac{r\sin\theta}{r^2} = -\dfrac{\sin\theta}{r} \\[2ex] \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{r\sin\theta}{r} = \sin\theta \,, & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{r\cos\theta}{r^2} = \dfrac{\cos\theta}{r} \end{cases}$$

لذا:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\cos\theta + \dfrac{\partial u}{\partial \theta}\left(-\dfrac{\sin\theta}{r}\right) = \cos\theta \dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} & (۳) \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \dfrac{\partial u}{\partial \theta}\left(\dfrac{\cos\theta}{r}\right) = \sin\theta \dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} & (۴) \end{cases}$$

حال $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ و $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ را برحسب مشتق‌های جزئی u برحسب r و θ حساب می‌کنیم

با مشتق گیری از طرفین (۳) نسبت به x و بکارگیری فرمول (۱) به عنوان یک قاعده:

$$(۳) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= \left(\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\right)\cos\theta +$$

$$+\left(-\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (۵)$$

با مشتق گیری از طرفین (۴) نسبت به متغیر y و بکارگیری فرمول (۲):

$$(۴) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\sin\theta\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\right)\sin\theta$$
$$+\left(\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial r}+\sin\theta\,\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin^2\theta\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\qquad(۶)$$

از جمع روابط (۵) و (۶) و حذف جملات قرینه بدست می آوریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\left(\frac{\sin^2\theta}{r^2}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\left(\frac{\sin^2\theta}{r}+\frac{\cos^2\theta}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial r}$$
$$=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

لذا:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\implies\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0}\qquad(۷)$$

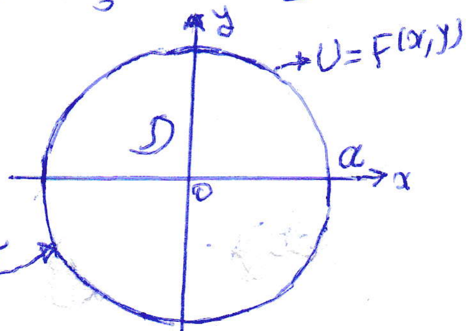
و (۷) معادله لاپلاس است در مختصات قطبی (r,θ)

معمولاً این معادله به این صورت نوشته می شود:

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$$

حل معادله لاپلاس درون دایره $x^2+y^2=a^2$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & \text{و}\quad x^2+y^2<a^2\\[2mm] u(x,y)\big|_{x^2+y^2=a^2}=F(x,y) & \text{و}\quad |u(x,y)|\leq M\end{cases}$$



ابتدا: معادله، قلمرو حل و شرط مرزی (مقدار تابع روی دایره) را به مختصات قطبی می بریم.

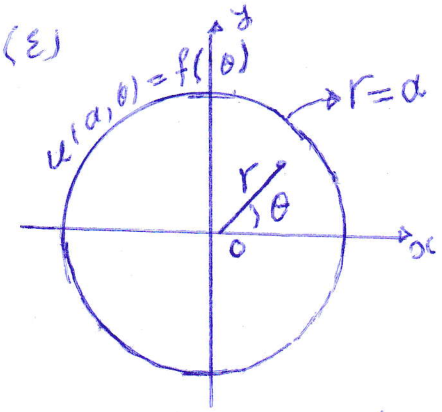
نحوه تبدیل مسئله از سیستم دکارتی به سیستم قطبی:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \Rightarrow r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \quad (۱)$$

$$x^2+y^2<a^2 \Rightarrow 0\leq r<a \quad (۲)$$

$$u(x,y)\big|_{x^2+y^2=a^2}=F(x,y) \Rightarrow u(a,\theta)=F(a\cos\theta,\ a\sin\theta)=f(\theta) \quad (۳)$$

$$|u(x,y)|\leq M \Rightarrow u(r,\theta)\leq M \quad (۴)$$



قبل از حل این مسئله دو مثال برای تبدیل شرط مرزی از مختصات دکارتی به مختصات قطبی

1) $u(x,y)\big|_{x^2+y^2=a^2}=x^2y^2$

$$u(a,\theta)=(a\cos\theta)^2(a\sin\theta)^2=a^4\cos^2\theta\sin^2\theta=\frac{a^4}{4}(2\sin\theta\cos\theta)^2$$
$$=\frac{a^4}{4}\sin^2 2\theta=\frac{a^4}{8}(1-\cos 4\theta)$$

2) $u(x,y)\big|_{x^2+y^2=a^2}=(x+y)^2$

$$u(a,\theta)=(a\cos\theta+a\sin\theta)^2=a^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta)$$
$$=a^2(1+\sin 2\theta)$$

حال برمی‌گردیم به حل معادله:

معادله (۱) یک معادله خطی (ولی با ضرایب متغیر) است. ضمناً از آنجائی که $f(\theta+2\pi)=f(\theta)$ ، $f(\theta)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب 2π است

در مرحله اول جوابهای خصوصی معادله را که به فرم $u(r,\theta)=R(r)\Phi(\theta)$ می باشند تعیین می‌کنیم با بردن این تابع در معادله وجداسازی متغیرها بدست می آوریم:

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \Rightarrow r^2R''(r)\Phi(\theta)+rR'(r)\Phi(\theta)+R(r)\Phi''(\theta)=0$$

$$\Rightarrow r^2\frac{R''(r)}{R(r)}+r\frac{R'(r)}{R(r)}+\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}=0$$

توجه اینکه تابع $\Phi(\theta)$ هم یک تابع متناوب و با دوره تناوب 2π است

$$\Rightarrow \frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)} = -\left(r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)}\right) = K$$

الف) $K=\lambda^2>0$:

$$\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)} = \lambda^2 \Rightarrow \Phi''(\theta) - \lambda^2\Phi(\theta) = 0 \Rightarrow \Phi(\theta) = c_1 e^{\lambda\theta} + c_2 e^{-\lambda\theta}$$

از آنجائی که $\Phi(\theta)$ یک تابع تناوب و با دورهٔ تناوب 2π است لذا:

$$c_1 e^{\lambda(\theta+2\pi)} + c_2 e^{-\lambda(\theta+2\pi)} = c_1 e^{\lambda\theta} + c_2 e^{-\lambda\theta}$$

یعنی:

$$c_1(e^{2\pi\lambda}-1)e^{\lambda\theta} + c_2(e^{-2\pi\lambda}-1)e^{-\lambda\theta} = 0$$

بنابراین $c_1=c_2=0$ و به جواب پوچ $\Phi(\theta)=0$ و درنتیجه $u(r,\theta)=0$ می‌رسیم.

ب) $K=0$:

$$\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)} = 0 \Rightarrow \Phi''(\theta) = 0 \Rightarrow \Phi(\theta) = c_1\theta + c_2$$

در اینجا هم: $c_1(\theta+2\pi) + c_2 = c_1\theta + c_2$ لذا $2\pi c_1 = 0$ و یا $c_1 = 0$

پس $\Phi(\theta) = c_2$ و همچنین:

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} = 0 \Rightarrow \frac{R''(r)}{R'(r)} + \frac{1}{r} = 0 \Rightarrow \ln R'(r) + \ln r = c$$

$$\ln rR'(r) = c \Rightarrow rR'(r) = e^c = c_3 \Rightarrow R'(r) = \frac{c_3}{r} \Rightarrow R(r) = c_3\ln r + c_4$$

از آنجائی $\lim_{r\to 0^+} \ln r \to -\infty$ لذا برای کراندار بودن جواب $c_3 = 0$

و $R(r) = c_4$ درنتیجه درحالت $K=0$ به جواب پایه‌ای:

$u(r,\theta) = R(r)\Phi(\theta) = c_2c_4$ و یا $u(r,\theta) = A_0$ می‌رسیم

پ) $K=-\lambda^2<0$

$$\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)} = -\lambda^2 \Rightarrow \Phi''(\theta) + \lambda^2\Phi(\theta) = 0 \Rightarrow \Phi(\theta) = c_1\cos\lambda\theta + c_2\sin\lambda\theta$$

باتوجه به تناوب بودن تابع $\Phi(\theta)$ با دورهٔ تناوب $T=2\pi$: $\lambda = n$

$\lambda = n$ است لذا : $\Phi(\theta) = C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta$ $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$

وحل معادله روی تابع $R(r)$ در این حالت :

$$-\left(r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)}\right) = -\lambda^2 = -n^2 \Rightarrow r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0$$

این یک معادله اویلر - کوشی است که جوابهای خصوصی آن به صورت $R = r^k$

است با بردن این تابع در معادله :

$$\Rightarrow r^2 k(k-1) r^{k-2} + r \times k r^{k-1} - n^2 r^k = (k(k-1) + k - n^2) r^k = 0$$

لذا :

$k(k-1) + k - n^2 = k^2 - n^2 = 0$ و از آنجا $k = n, -n$

به این ترتیب دو جواب خصوصی معادله دیفرانسیل بالا :

$R = r^n$ و $R = r^{-n}$

می باشند $n = 1, 2, 3, \ldots$ وجواب عمومی

این معادله

$$R(r) = C_3 r^n + \frac{C_4}{r^n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

از آنجائی که $\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{r^n} \to \infty$ لذا برای کراندار بودن جواب

لازم است که $C_4 = 0$ پس :

$$R(r) = C_3 r^n$$

وجوابهای پایه ای در حالت $k > 0$ عبارتند از :

$$u(r, \theta) = C_3 r^n (C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta)$$

ویا :

$$u(r, \theta) = r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

وجمع تمام جوابهای پایه ای به عنوان جواب نهائی :

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \quad (*)$$

ودرنهایت شرط مرزی $u(a, \theta) = f(\theta)$ را روی تابع $(*)$ اعمال میکنیم

$$u(a, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = f(\theta)$$

این رابطه بیانگر بسط تابع تناوب $f(\theta)$ با دوره تناوب $T = 2\pi$ به سری

فوریه است و A_0 و $a^n A_n$ و $a^n B_n$ ضرایب این بسط هستند

لذا:

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\,dz$$

$$a^n A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\cos nz\,dz \Rightarrow A_n=\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} f(z)\cos nz\,dz$$

$$a^n B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\sin nz\,dz \Rightarrow B_n=\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} f(z)\sin nz\,dz$$

با محاسبه این انتگرال ضرایب A_0 و A_n و B_n را محاسبه و آنها را در تابع (*) قرار می‌دهیم:

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\,dz+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(\int_0^{2\pi} f(z)\cos nz\,dz\Big)\Big(\frac{r}{a}\Big)^n\cos n\theta$$
$$+\Big(\int_0^{2\pi} f(z)\sin nz\,dz\Big)\Big(\frac{r}{a}\Big)^n\sin n\theta\Big];\ r<a$$

مثال (۱):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & x^2+y^2<4 \quad (a=2)\\[2mm] u(x,y)\big|_{x^2+y^2=4}=x^3 & |u(x,y)|\le M\end{cases}$$

بیان مسئله در مختصات قطبی:

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \quad 0<r<2$$

$$u(2,\theta)=(2\cos\theta)^3=8\cos^3\theta=8\Big[\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta\Big]$$
$$=6\cos\theta+2\cos 3\theta=f(\theta)$$

(توجه: $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$)

جواب مسئله عبارت است از:

$$u(r,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta) \quad (*)$$

و با اعمال شرط مرزی:

$$u(2,\theta)=f(\theta)=6\cos\theta+2\cos 3\theta$$

$$r=2:\ u(2,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty} 2^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)\equiv 6\cos\theta+2\cos 3\theta$$

از اتحاد فوق نتیجه می‌شود:

$A_0=0$ و $2^1 A_1 = 6$ و $2^3 A_3 = 2$, $A_n=0$ $n\neq 1,3$; $B_n=0$, $n=1,2,3,4,\dots$

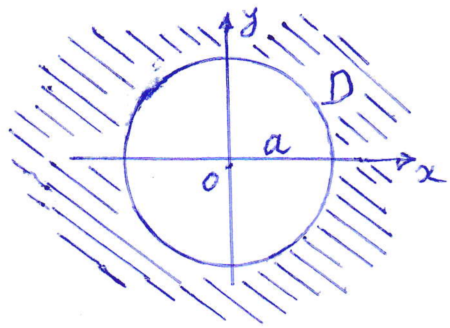
لذا: $A_1=3$ و $A_3=\frac{1}{4}$ و سایر ضریب‌ها همگی صفراند و این‌ها را در (*) به عنوان جواب مسأله اعمال می‌کنیم:

$$u(r,\theta)= rA_1\cos\theta + r^3A_3\cos 3\theta = 3r\cos\theta+\frac{1}{4} r^3\cos 3\theta$$

این جواب مسأله در سیستم قطبی است و می‌توان با بکارگیری روابط $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ و $\sqrt{x^2+y^2}=r$ تابع u را برحسب متغیرهای x و y نوشت.

$$u=3r\cos\theta+\frac{1}{4} r^3(4\cos^3\theta-3\cos\theta)$$
$$=3r\cos\theta+(r\cos\theta)^3-\frac{3}{4} r^2(r\cos\theta)$$
$$=3x+x^3-\frac{3}{4}(x^2+y^2)x=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}xy^2+3x=u(x,y)$$

حل معادله لاپلاس در خارج دایره $x^2+y^2=a^2$ $(r=a)$



$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \qquad r>a$$

$$u(a,\theta)=f(\theta)\ ,\ |u(r,\theta)|\leq M$$

حل این مسئله با اندک تفاوتی عیناً مانند حل معادله لاپلاس در داخل دایره است، با بدل تابع $u(r,\theta)=R(r)\Phi(\theta)$ در معادله و جداسازی متغیرها به تساوی زیر

$$\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}=-\left(r^2\frac{R''(r)}{R(r)}+r\frac{R'(r)}{R(r)}\right)=K$$

می‌رسیم که در این جا هم به ازای $K>0$ جواب پوچ $u(r,\theta)\equiv 0$ نتیجه می‌شود

به ازای $K=0$، بدست می‌آوریم $\Phi(\theta)=c_1$ و $R(r)=c_3\ln r+c_4$

در اینجا هم وقتی که $r\to\infty$، $\lim\limits_{r\to\infty}\ln r\to\infty$ و برای کراندار بودن جواب لازم است که $c_3=0$ باشد، لذا جواب پایه‌ای:

$u(r,\theta)=c_1c_4=A_0$ داریم.

به ازای $K=-\lambda^2<0$: همانند حل مسئله در داخل دایره برای توابع $\Phi(\theta)$ و $R(r)$ این نتایج داریم:

$$\Phi(\theta)=c_1\cos n\theta+c_2\sin n\theta,\ n=1,2,3,\dots$$

$$R(r)=c_3r^n+\frac{c_4}{r^n}\ ,\ n=1,2,3,\dots$$

ملاحظه می‌شود وقتی که $r\to\infty$، $r^n\to\infty$ پس برای کراندار بودن جواب بایستی $c_3=0$ باشد (و این تنها تفاوت فرمول بندی مسئله نسبت به حل معادله در داخل دایره است که در آنجا ضریب $\frac{1}{r^n}$ را مساوی صفر قرار میدادیم) لذا

$$u(r,\theta)=\frac{c_4}{r^n}(c_1\cos n\theta+c_2\sin n\theta)=\frac{1}{r^n}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)$$
$$n=1,2,3,\dots$$

و جواب نهائی مسئله:

$$u(r,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^n}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta) \qquad (*)$$

حال شرط مرزی مسئله را که مقدار تابع u روی دایره $r=a$ است روی جواب $(*)$ اعمال می‌کنیم:

$$u(a,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)=f(\theta)$$

این تساوی بیانگر بسط تابع تناوب $f(\theta)$ با دوره تناوب $T=2\pi$ است و A_0 و $\frac{A_n}{a^n}$ و $\frac{B_n}{a^n}$ ضرایب این بسط هستند.

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z)\,dz$$

$$\frac{A_n}{a^n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(z)\cos nz\,dz \Rightarrow A_n=\frac{a^n}{\pi}\int_0^{2\pi}f(z)\cos nz\,dz$$

$$\frac{B_n}{a^n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(z)\sin nz\,dz \Rightarrow B_n=\frac{a^n}{\pi}\int_0^{2\pi}f(z)\sin nz\,dz$$

با قرار دادن این انتگرال‌ها در فرمول $(*)$ جواب مسئله بدست می‌آید.

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z)\,dz+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_0^{\infty}f(z)\cos nz\,dz\right)\cos n\theta+\left(\int_0^{\infty}f(z)\sin nz\,dz\right)\sin n\theta\right]\left(\frac{a}{r}\right)^n \qquad r>a$$

دیده می‌شود که فرمول حل مسئله لاپلاس در خارج دایره $r=a$ مشابه فرمول حل این معادله در داخل دایره $r=a$ است با این تفاوت که $\frac{r}{a}$ به $\frac{a}{r}$ تبدیل شده است.

مثال (دوم) حل معادلهٔ لاپلاس در ناحیه $r > a$ با شرایط مرزی $u(a,\theta) = a(\cos\theta + \sin\theta)$ و فرض کراندار بودن جواب.

حل: فرمول حل:

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

و با اعمال شرط مرزی:

$$u(a,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = a(\cos\theta + \sin\theta)$$

و با مقایسه ضرایب $\sin$ و $\cos$ مضرب‌های θ بدست می‌آوریم

$$A_0 = 0 \quad A_n = B_n = 0 \; ; \; n \neq 1 \qquad \frac{A_1}{a} = a, \; \frac{B_1}{a} = a \Rightarrow A_1 = B_1 = a^2$$

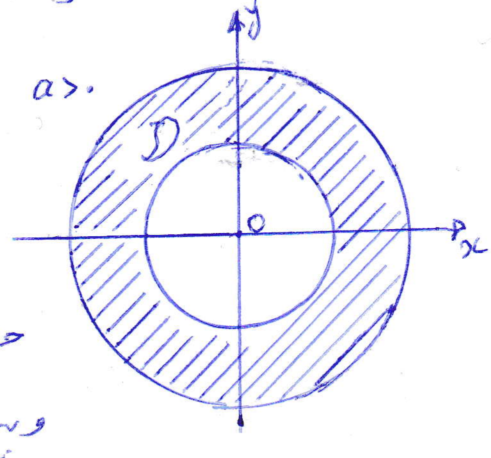
و جواب مسئله:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{r}a^2\cos\theta + \frac{1}{r}a^2\sin\theta = \frac{a^2}{r}(\cos\theta + \sin\theta) \qquad r \geq a$$

و جواب مسئله در مختصات دکارتی:

$$u(x,y) = \frac{a^2}{r^2}(r\cos\theta + r\sin\theta) = \frac{a^2(x+y)}{x^2+y^2} \qquad x^2+y^2 \geq a^2$$

حل معادلهٔ لاپلاس در حلقهٔ $a^2 < x^2+y^2 < b^2$:



$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \qquad a < r < b \quad a > 0$$

$$u(a,\theta) = f(\theta), \; u(b,\theta) = g(\theta)$$

$$|u(r,\theta)| < M$$

حل این مسئله هم مانند حل معادله لاپلاس در درون و بیرون دایره است با این تفاوت که در این مسئله تغییرات متغیر r محدود است به $a < r < b$.

لذا $\ln r$ و r و $\frac{1}{r}$ محدود می‌مانند. لذا جوابهای پایه‌ای کراندارند و احتیاج به اعمال این شرط نیست، ولی بعد از جمع جوابهای پایه‌ای مجموعه ضرایبی که از روی اعمال شرطهای مرزی بدست می‌آیند، نسبت به مسائل قبلی دو برابر می‌شود، و در واقع یک شرط مرزی بجای

دو شرط مرزی $u(a,\theta)=f(\theta)$ و $u(b,\theta)=g(\theta)$ اعمال می‌شود

$$\Rightarrow \frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}=-\left(r^2\frac{R''(r)}{R(r)}+r\frac{R'(r)}{R(r)}\right)=K$$

(i) به ازای $K=0$ بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\Phi(\theta)=c_2\\ R(r)=c_3\ln r+c_4\end{cases}\Rightarrow u(r,\theta)=c_2(c_3\ln r+c_4)=\underline{\underline{B_0\ln r+A_0}}$$

(ii) در حالت $K>0$ و $K=-\lambda^2$ داریم:

$$\begin{cases}\Phi(\theta)=c_1\cos n\theta+c_2\sin n\theta\\ R(r)=c_3r^n+\dfrac{c_4}{r^n}\end{cases}$$

$$\Rightarrow u(r,\theta)=\left(c_3r^n+\frac{c_4}{r^n}\right)(c_1\cos n\theta+c_2\sin n\theta)$$

$$\underline{\underline{u(r,\theta)=\left(A_nr^n+\frac{B_n}{r^n}\right)\cos n\theta+\left(C_nr^n+\frac{D_n}{r^n}\right)\sin n\theta}}\qquad n=1,2,3,\dots$$

و جواب نهائی معادله:

$$u(r,\theta)=B_0\ln r+A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_nr^n+\frac{B_n}{r^n}\right)\cos n\theta+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_nr^n+\frac{D_n}{r^n}\right)\sin n\theta\quad (*)$$

حال شرطهای مرزی $u(a,\theta)=f(\theta)$ و $u(b,\theta)=g(\theta)$ را روی تابع (*) اعمال می‌کنیم:

(i) $u(a,\theta)=f(\theta)$

$$u(a,\theta)=B_0\ln a+A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_na^n+\frac{B_n}{a^n}\right)\cos n\theta+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_na^n+\frac{D_n}{a^n}\right)\sin n\theta=f(\theta)$$

و از اینجا بدست می‌آوریم:

$$B_0\ln a+A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\,d\xi\qquad(1)$$

$$A_na^n+\frac{B_n}{a^n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\cos n\xi\,d\xi\qquad(2)$$

$$C_na^n+\frac{D_n}{a^n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\sin n\xi\,d\xi\qquad(3)$$

(ii) $u(b,\theta)=g(\theta)$

$$u(b,\theta)=B_0\ln b+A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_nb^n+\frac{B_n}{b^n}\right)\cos n\theta+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_nb^n+\frac{D_n}{b^n}\right)\sin n\theta=g(\theta)$$

و از این ربط بدست می‌آوریم:

$$B_0\ln b+A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\xi)\,d\xi \qquad (4)$$

$$A_nb^n+\frac{B_n}{b^n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(\xi)\cos n\xi\,d\xi \qquad (5)$$

$$C_nb^n+\frac{D_n}{b^n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(\xi)\sin n\xi\,d\xi \qquad (6)$$

پس از محاسبه انتگرال‌ها:

از حل معادلات (۱) و (۴) ضریب‌های A_0 و B_0، از حل معادلات (۲) و (۵) ضریب‌های A_n و B_n؛ و از حل معادلات (۳) و (۶) ضریب‌های C_n و D_n بدست می‌آیند و سپس آنها را در تابع (*) می‌گذاریم.

مسئله برای حل. نشان دهید که جواب معادله لاپلاس در حلقه $a\leq r\leq b$ تحت شرط‌های $u(a,\theta)=u_1$ و $u(b,\theta)=u_2$ چنین است.

$$u(r,\theta)=\frac{1}{\ln\frac{b}{a}}\left[u_1\ln\frac{b}{r}+u_2\ln\frac{r}{a}\right]$$

اصل ماکسیمم و می‌نیمم.

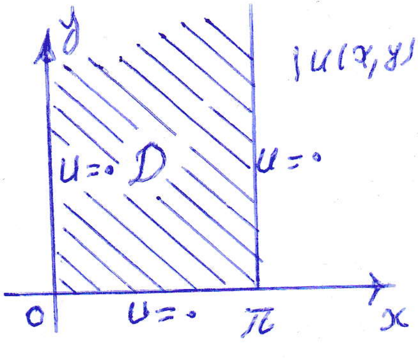
ثابت می‌شود که اگر تابع $u=u(x,y)$ جواب معادلهٔ لاپلاس در قلمرو D، در ناحیه D و مرزش، پیوسته باشد، آنگاه ماکسیمم و می‌نیمم تابع u در D و مرزش در نقاطی از مرز D رخ می‌دهد. از این قضیه می‌توان حدود تغییرات تابع u جواب معادلهٔ لاپلاس در ناحیه مفروض قبل از حل آن تعیین کرد.

به عنوان مثال حدود $u=u(x,y)$ جواب مثال (۱) در ناحیه $x^2+y^2\leq 4$، عبارتست از $-8\leq u\leq 8$ به عبارات دیگر:

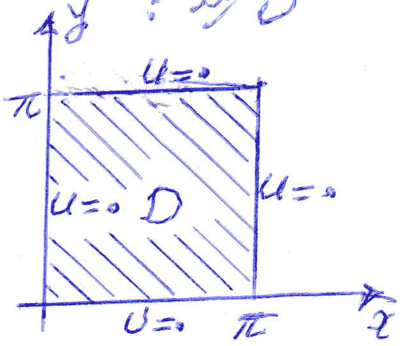
$$\Rightarrow \max_{x^2+y^2\leq 4}u(x,y)=\max_{x^2+y^2=4}(x^3)=(2)^3=8,\quad \min_{x^2+y^2\leq 4}u(x,y)=\min_{x^2+y^2\leq 4}(x^3)=(-2)^3=-8$$

مسائل مربوط به معادله دیفرانسیل لاپلاس

۱- معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=1$ را در هر یک از نواحی زیر با توجه به شرائط مرزی داده شده حل کنید:



$|u(x,y)|\le M$



۲- حل معادله

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad 0<x<l,\ y>0$$

$|u(x,y)|\le M$

$u(0,y)=u(l,y)=0$ ، $u(x,0)=u_0\sin\frac{\pi}{l}x$

جواب: $u(x,y)=u_0 e^{-\frac{\pi}{l}y}\sin\frac{\pi}{l}x$

۳- حل معادله

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad 0<y<b,\ x>0$$ با شرائط

$|u(x,y)|\le M$ ؛ $u(0,y)=\frac{u_0}{b}(y+b)$ ؛ $u(x,0)=0$ ، $u(x,b)=u_0$

۴- حل معادله

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 : \quad x^2+y^2<1$$ تحت شرط کلی:

$|u(x,y)|\le M$ و $u(x,y)|_{x^2+y^2=1}=|y|$

۵- حل معادله:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ با فرض $|u(x,y)|\le M$

الف- در ناحیه $x^2+y^2<1$. ب- در ناحیه $1<x^2+y^2$ برای هر دو مسأله $u(x,y)|_{x^2+y^2=1}=xy$. ماکسیمم و مینیمم تابع u را برای هر دو مسأله حساب کنید.

جواب الف- $u=xy$ ، ب- $u=\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ و برای هر دو مسأله $u_{max}=\frac{1}{2}$ ، $u_{min}=-\frac{1}{2}$

۶- معادله لاپلاس در ناحیه $1<x^2+y^2<4$ و $u(x,y)|_{x^2+y^2=1}=u(x,y)|_{x^2+y^2=4}=xy$ حل کنید.

حل معادلات انتشار و لاپلاس در نیم صفحه و ربع صفحه

قبل از ورود به حل این معادلات در نیم صفحه و ربع صفحه به چند ابزار نیاز داریم که به ذکر آنها می پردازیم

۱- انتگرال پواسن :

$$I=\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{b^2}{4a}}\qquad a>0$$

برای اثبات این فرمول این انتگرال را به عنوان تابعی از b در نظر می گیریم : $I=I(b)$ ، ابتداء به ازای $b=0$ این تابع را حساب می کنیم

$$I(0)=\int_0^\infty e^{-ax^2}dx=\int_{t=0}^\infty e^{-at}\times\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1}dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1}e^{-at}dt$$

$$x^2=t\Rightarrow x=t^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{a^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

سپس $I'(b)$ را حساب می کنیم :

$$I(b)=\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,dx\Rightarrow I'(b)=\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial b}\left(e^{-ax^2}\cos bx\right)dx$$

$$=\int_0^\infty -x\,e^{-ax^2}\sin bx\,dx=\int_0^\infty\underbrace{\sin bx}_{u}\underbrace{(-x\,e^{-ax^2}dx)}_{dv}$$

$$=\underbrace{\sin bx\left(\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\right)\Big]_{x=0}^{\infty}}_{=0}-\int_0^\infty\left(\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\times b\cos bx\,dx\right)$$

$$I'(b)=-\frac{b}{2a}\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,dx=-\frac{b}{2a}I(b)$$

و این یک معادله دیفرانسیل روی تابع I و متغیر b است

$$\Rightarrow\frac{I'(b)}{I(b)}=-\frac{b}{2a}\xrightarrow{\text{انتگرال}}\ln I(b)=\int-\frac{b}{2a}db=-\frac{b^2}{4a}+c$$

$$I(b)=e^{c-\frac{b^2}{4a}}=e^{c}e^{-\frac{b^2}{4a}}=A\,e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

برای محاسبه ثابت A (که وابسته به b نیست) ، $I(0)$ را توسط این نتیجه با $I(0)$ که قبلاً حساب کردیم مساوی قرار می دهیم :

$$\Rightarrow I(0) = A e^{0} = A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

لذا :

$$I(b) = \int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

۲- داریم :

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad a>0$$

این انتگرال با دوبار بکارگیری روش جزء به جزء یا با استفاده از اعداد مختلط حساب می‌شود . درحقیقت این انتگرال بیانگر تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = \cos bx$ است

$$\mathcal{L}(\cos bx) = \int_0^\infty e^{-sx}\cos bx\,dx = \frac{s}{s^2+b^2} \qquad s>0$$

۳- تابع خطا ، تابع خطا که با $erf(x)$ نشان داده می‌شود براساس انتگرال :

$$erf(x) = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}\,dt \qquad -\infty<x<\infty$$

تعریف می‌شود

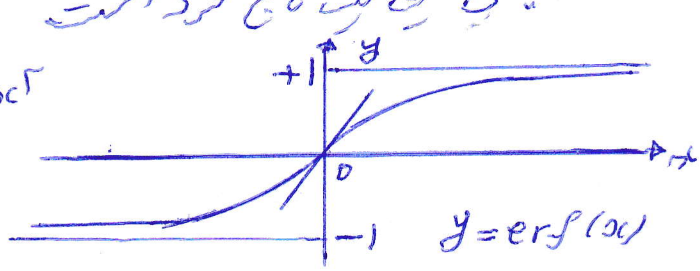
خواص این تابع :

1) $erf(0)=0$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = 1$

3) $erf(-x) = -erf(x)$ یعنی این یک تابع فرد است

4) $\frac{d}{dx}\left(erf(x)\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$



انتگرال فوریه - انتگرال فوریه حالت پیوستهٔ سری فوریه است که در آن سری (مجموع) به انتگرال تبدیل می‌شود به عبارت دیگر بجای اینکه یک تابع را برحسب سری مثلثاتی بسط دهیم آن را برحسب انتگرالی که شامل توابع مثلثاتی است بیان نمائیم . در جدول صفحه بعد متناظر بین تعاریف و فرمولهای این دو بحث ارائه شده است

<table>
<tr><th>سری فوریه</th><th>انتگرال فوریه</th></tr>
<tr><td>
اگر تابع $f(x)$ که در $\mathbb{R}$ تعریف شده است پیوسته قطعه به قطعه و تناوبی با دوره تناوب $T=2\pi$ باشد، آنگاه

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin nx$$

بطوریکه:

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(z)\cos nz\,dz,\quad A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(z)dz$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(z)\sin nz\,dz$$
</td><td>
اگر تابع $f(x)$ که در $\mathbb{R}$ تعریف شده است پیوسته قطعه قطعه و داشته باشیم $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$، آنگاه

$$f(x)=\int_{\lambda=0}^{\infty}A(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda+\int_{\lambda=0}^{\infty}B(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda$$

بطوریکه:

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\cos\lambda z\,dz$$

$$B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\sin\lambda z\,dz$$
</td></tr>
<tr><td>
الف - اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد، آنگاه

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(z)\cos nz\,dz,\quad A_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(z)dz$$

$$B_n=0$$

و داریم:

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx$$

ب - اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، آنگاه:

$$A_n=A_0=0$$

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(z)\sin nz\,dz$$
</td><td>
الف - اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد، آنگاه:

$$A(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}f(z)\cos\lambda z\,dz$$

$$B(\lambda)=0$$

و داریم:

$$f(x)=\int_{\lambda=0}^{\infty}A(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda$$

ب - اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، آنگاه:

$$A(\lambda)=0$$

$$B(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_{z=0}^{\infty}f(z)\sin\lambda z\,dz$$
</td></tr>
<tr><td>
بسط های نیم دامنه تابع $f(x)$ که در بازه $(0,\pi)$ تعریف شده

الف - بسط تابع $f(x)$ به سری کسینوس فوریه:

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx \quad 0<x<\pi$$

$$A_0=\frac{2}{\pi}\int_{z=0}^{\pi}f(z)dz,\quad A_n=\frac{2}{\pi}\int_{z=0}^{\pi}f(z)\cos nz\,dz$$

ب - بسط تابع $f(x)$ به سری سینوس - فوریه

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin nx \quad 0<x<\pi$$

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_{z=0}^{\pi}f(z)\sin nz\,dz$$
</td><td>
بسط های نیم دامنه تابع $f(x)$ که در بازه $(0,\infty)$ تعریف شده است

الف - بسط تابع $f(x)$ به انتگرال کسینوس - فوریه

$$f(x)=\int_{\lambda=0}^{\infty}A(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda \quad 0<x<\infty$$

$$A(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_{z=0}^{\infty}f(z)\cos nz\,dz$$

ب - بسط تابع $f(x)$ به انتگرال سینوس - فوریه

$$f(x)=\int_{\lambda=0}^{\infty}B(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda$$

$$B(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_{z=0}^{\infty}f(z)\sin\lambda z\,dz$$
</td></tr>
</table>

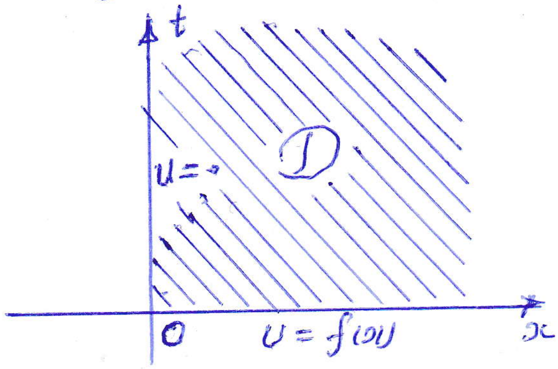
حل معادلهٔ انتشار در ربع صفحه $x>0$ و $t>0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; ; \; x>0 \; , \; t>0$$

$$u(0,t)=0 \; ; \; t>0$$

$$u(x,0)=f(x) \quad x>0$$

$$|u(x,t)|\le M$$



I- تعیین جوابهای خصوصی معادله $u(x,t)=X(x)T(t)$

همانند حل معادله انتشار در نوار $l>x>0$ است:

$$X(x)T'(t) = cX''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T'(t)}{cT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = K = -\lambda^2$$

(دراینجا هم به ازاء $K=0$ و $K>0$ با توجه به شرط مرزی $u(0,t)=0$ و کراندار بودن جواب به جواب پوچ $u(x,t)=0$ می‌رسیم)

لذا داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{T'(t)}{cT(t)} = -\lambda^2 \Rightarrow T(t) = c_3 e^{-c\lambda^2 t} \\ X''(x)+\lambda^2 X(x) \Rightarrow X(x) = c_1\cos\lambda x + c_2\sin\lambda x \end{cases}$$

و

$$u(x,t) = e^{-c\lambda^2 t}(A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)$$

II- با اعمال شرط مرزی $u(0,t)=0$ بدست می‌آوریم $A=0$

و درنتیجه:

$$u(x,t) = Be^{-c\lambda^2 t}\sin\lambda x \quad (\lambda>0)$$

III- دراینجا چون شرط مرزی $u(l,t)=0$ نداریم لذا مقادیر λ در تناظر با اعداد n و $n\in N$ نیست لذا $\lambda>0$ و پیوسته باقی می‌ماند و جمع جوابهای پایه‌ای بعنوان جواب نهائی منجر به انتگرال گیری که از جوابهای پایه‌ای روی پارامتر λ می‌شود به این ترتیب که ضریب B به عنوان تابعی از پارامتر λ : $B=B(\lambda)$ درنظر می‌گیریم (بجای $B=B_n$)

$$u(x,t)=B(\lambda)e^{-c\lambda^2 t}\sin\lambda x$$

و جواب مسأله:

$$u(x,t)=\int_{\lambda=0}^{\infty}B(\lambda)e^{-c\lambda^2 t}\sin\lambda x\,d\lambda \qquad (*)$$

(این رابطه جایگزین: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-\frac{cn^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x$ در حل مسأله روی نوار است)

IV - اعمال شرط اولیه: $u(x,0)=f(x)$ روی تابع $(*)$

$$u(x,0)=\int_{\lambda=0}^{\infty}B(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda=f(x)$$

این تساوی بیانگر بسط تابع $f(x)$ به انتگرال سینوس-فوریه است و همانطور که قبلاً بیان شد:

$$B(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_{z=0}^{\infty}f(z)\sin\lambda z\,dz \qquad (**)$$

(و این هم جایگزین $B_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(z)\sin nz\,dz$ در یافتن ضرایب بسط تابع f به سری سینوس-فوریه است)

با بردن $B(\lambda)$ از رابطه $(**)$ در انتگرال $(*)$ تابع $u(x,t)$ در آغاز به صورت یک انتگرال دوگانه روی متغیرهای z و λ بدست می‌آید:

$$u(x,t)=\int_{\lambda=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_{z=0}^{\infty}f(z)\sin\lambda z\,dz\right)e^{-c\lambda^2 t}\sin\lambda x\,d\lambda$$

و با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_{z=0}^{\infty}f(z)\left[\int_{\lambda=0}^{\infty}e^{-ct\lambda^2}\sin z\lambda\,\sin x\lambda\,d\lambda\right]dz \qquad (***)$$

انتگرال داخلی (انتگرال روی λ) قابل محاسبه است ، با بکارگیری اتحاد مثلثاتی :

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$

بدست می‌آوریم :

$$\int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-ct\lambda^2} \sin z\lambda \sin x\lambda \, dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-ct\lambda^2}\left[\cos(z-x)\lambda - \cos(z+x)\lambda\right] d\lambda$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-ct\lambda^2}\cos(z-x)\lambda \, d\lambda - \int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-ct\lambda^2}\cos(z+x)\lambda \, d\lambda\right]$$

و طبق انتگرال پواسن :

$$\int_0^{\infty} e^{-a\lambda^2}\cos b\lambda \, d\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-b^2/4a} \qquad a>0$$

بدست می‌آوریم

$$\int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-ct\lambda^2}\sin z\lambda \sin x\lambda \, dz = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{ct}}\, e^{-\frac{(z-x)^2}{4ct}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{ct}}\, e^{-\frac{(z+x)^2}{4ct}}\right]$$

و با بردن این انتگرال در رابطه (***)

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\times\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{ct}}\int_{z=0}^{\infty} f(z)\left(e^{-\frac{(z-x)^2}{4ct}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{4ct}}\right)dz$$

یا :

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi ct}}\int_0^{\infty} f(z)\left(e^{-\frac{(z-x)^2}{4ct}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{4ct}}\right)dz}$$

و به این ترتیب جواب مسئله برحسب یک انتگرال ساده بدست می‌آید
در حالت خاصی که $f(z)=u_0$ (u_0 = مقدار ثابت) باشد
این جواب برحسب تابع خطا بیان می‌شود .

$$f(x)=u_0 \Rightarrow u(x,t) = \frac{u_0}{2\sqrt{\pi ct}}\left[\int_0^{\infty} e^{-\frac{(z-x)^2}{4ct}}\,dz - \int_0^{\infty} e^{-\frac{(z+x)^2}{4ct}}\,dz\right]$$

در انتگرال سمت چپ تغییر متغیر $\eta=\frac{z-x}{2\sqrt{ct}}$ و در انتگرال دوم

تغییر متغیر $\eta=\frac{z+x}{2\sqrt{ct}}$ بکار می‌بریم، برای هر دو انتگرال $dz=2\sqrt{ct}\,d\eta$ و داریم:

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2\sqrt{\pi ct}}\times 2\sqrt{ct}\left[\int_{\frac{-x}{2\sqrt{ct}}}^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta-\int_{\frac{x}{2\sqrt{ct}}}^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta\right]$$

$$=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{\frac{-x}{2\sqrt{ct}}}^{0}+\int_0^{\infty}-\left(\int_0^{\infty}-\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{ct}}}\right)\right]$$

$$=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\frac{x}{2\sqrt{ct}}}^{0}e^{-\eta^2}d\eta+\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{ct}}}e^{-\eta^2}\right]=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{2\sqrt{ct}}}^{\frac{x}{2\sqrt{ct}}}e^{-\eta^2}d\eta$$

$$=\frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{ct}}}e^{-\eta^2}d\eta=u_0\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{ct}}}e^{-\eta^2}d\eta\right)$$

یعنی

$$\underline{u(x,t)=u_0\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{ct}}\right)}$$

مثال (۱)

حل مسأله:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ;\ x>0\ ,\ t>0\ ;\ u(0,t)=u_0$$

$$u(x,0)=\begin{cases}0 & 0<x<1\\ u_0 & x\geq 1\end{cases}\qquad |u(x,y)|<M$$

حل - در این معادله ابتدا تغییر تابع $u(x,t)=v(x,t)+u_0$ بکار می‌بریم بنابراین مسأله در که تابع v چنین است:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\ ;\ x>0\ ,\ t>0\ ;\ v(0,t)=u(0,t)-u_0=u_0-u_0=0$$

و شرط اولیه مسأله:

$$v(x,0)=u(x,0)-u_0=$$
$$=\begin{cases} 0-u_0=-u_0 & 0<x<1 \\ u_0-u_0=0 & x\geq 1 \end{cases}=f(x)$$

حال:

$$v(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi c t}}\int_0^\infty f(z)\left(e^{-\frac{(z-x)^2}{4ct}}-e^{-\frac{(z+x)^2}{4ct}}\right)dz \qquad c=1$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left[\int_{z=0}^{1}-u_0\left(e^{-\frac{(z-x)^2}{4t}}-e^{-\frac{(z+x)^2}{4t}}\right)dz+\int_1^\infty 0\times(\cdots)dz\right]$$

$$=-\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}}\left[\int_{z=0}^{1}e^{-\frac{(z-x)^2}{4t}}dt-\int_{z=0}^{1}e^{-\frac{(z-x)^2}{4t}}dt\right]$$

$$\frac{z-x}{2\sqrt{t}}=\eta \qquad \frac{z+x}{2\sqrt{t}}=\eta \qquad dz=2\sqrt{t}\,d\eta$$

$$v(x,t)=-\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}}\times 2\sqrt{t}\left[\int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\frac{1-x}{2\sqrt{t}}}e^{-\eta^2}d\eta-\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\frac{1+x}{2\sqrt{t}}}e^{-\eta^2}d\eta\right]$$

$$=-\frac{u_0}{2}\times\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{\frac{1-x}{2\sqrt{t}}}e^{-\eta^2}d\eta-\int_0^{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}e^{-\eta^2}d\eta-\int_0^{\frac{1+x}{2\sqrt{t}}}e^{-\eta^2}d\eta\right.$$
$$\left.+\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}}e^{-\eta^2}d\eta\right]$$

$$u(x,t)=-\frac{u_0}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right)-\operatorname{erf}\left(-\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{1+x}{2\sqrt{t}}\right)\right.$$
$$\left.+\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right]$$

واز آنجائی که تابع $\operatorname{erf}(x)$ فرد است داریم $\operatorname{erf}\left(-\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)=-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$

و جواب مسأله:

$$u(x,t)=u_0+v(x,t)$$
$$=u_0-\frac{u_0}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right)+2\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right)\right]$$

مثال (۲) معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial u}{\partial x} + b^2 u$ در قلمرو

$D: t>0$ و $x>0$. و با شرایط مرزی و اولیهٔ $u(0,t)=0 ; t\geq 0$.

و $u(x,0)=\begin{cases} 0 \;; & 0<x<m \\ u_0 e^{-bx} , & x>m \end{cases}$ درنظر می‌گیریم اولاً نشان دهید

که با بکارگیری تبدیل تابع $u = e^{\alpha x} v(x,t)$ و انتخاب مناسب α ، می‌توان

معادله بالا را به معادله $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ منجر نمود ، α را حساب کنید

ثانیاً مسأله را روی تابع نوشته و آن را حل کنید و تابع $u(x,t)$ را

پیدا کنید .

حل :

$$\begin{cases} u = e^{\alpha x} v(x,t) \;; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = e^{\alpha x}\frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = e^{\alpha x}\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha e^{\alpha x} v \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{\alpha x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\alpha e^{\alpha x}\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha^2 e^{\alpha x} v . \end{cases}$$

و بیان معادله برحسب تابع v :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial u}{\partial x} + b^2 u \Rightarrow$$

$$e^{\alpha x}\frac{\partial v}{\partial t} = e^{\alpha x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\alpha e^{\alpha x}\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha^2 e^{\alpha x} v + 2b\left(e^{\alpha x}\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha e^{\alpha x} v\right)$$
$$+ b^2 e^{\alpha x} v$$

طرفین معادله را بر $e^{\alpha x}$ تقسیم نموده و طرف دوم معادله را برحسب مشتق‌های تابع v برحسب x مرتب می‌کنیم :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2(\alpha+b)\frac{\partial v}{\partial x} + (\alpha^2 + 2b\alpha + b^2) v$$

و یا :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2(\alpha+b)\frac{\partial v}{\partial x} + (\alpha+b)^2 v$$

دیده می‌شود که اگر $\alpha + b = 0$ باشد یعنی $\alpha = -b$ ، آنگاه ضریب $\frac{\partial v}{\partial x}$ و v توأماً (باهم‌زمان) صفر می‌شوند .

و معادله به صورت : $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ در می‌آید .

لذا با بکارگیری تبدیل $u(x,t)=e^{-bx}v(x,t)$ مسئله بالا روی تابع v به این صورت بیان می‌شود

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\ ;\ x>0\ ,\ t>0\quad (c=1)$$

$$v(0,t)=e^{bx_0}u(0,t)=0\qquad t>0$$

$$v(x,0)=e^{bx}u(x,0)=\begin{cases}0 & 0<x<m\\ e^{bx}\cdot u_0e^{-bx}=u_0 & x>m\end{cases}=f(x)$$

و جواب مسئله برای تابع $v(x,t)$:

$$v(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi ct}}\int_0^\infty f(z)\left(e^{-\frac{(z-x)^2}{4ct}}-e^{-\frac{(z+x)^2}{4ct}}\right)dz\quad (c=1)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_m^\infty u_0\left(e^{-\frac{(z-x)^2}{4t}}-e^{-\frac{(z+x)^2}{4t}}\right)dz$$

$$=\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}}\left[\int_m^\infty e^{-\frac{(z-x)^2}{4t}}dz-\int_m^\infty e^{-\frac{(z+x)^2}{4t}}dz\right]$$

$$\downarrow$$

$$\frac{z-x}{2\sqrt{t}}=\eta\qquad \frac{z+x}{2\sqrt{t}}=\eta\qquad dz=2\sqrt{t}\,d\eta$$

$$v(x,t)=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{\frac{m-x}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-\eta^2}d\eta-\int_{\frac{m+x}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-\eta^2}d\eta\right]$$

$$=\frac{u_0}{2}\times\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^\infty-\int_0^{\frac{m-x}{2\sqrt{t}}}-\left(\int_0^\infty-\int_0^{\frac{m+x}{2\sqrt{t}}}\right)\right]$$

$$=\frac{u_0}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m+x}{2\sqrt{t}}}e^{-\eta^2}d\eta-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m-x}{2\sqrt{t}}}e^{-\eta^2}d\eta\right]$$

$$u(x,t)=e^{-bt}v(x,t)=\underline{\underline{\frac{u_0}{2}e^{-bt}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+m}{2}\right)+\operatorname{erf}\left(\frac{x-m}{2}\right)\right]}}$$

توضیح: در حالت کلی برای منجر کردن معادله $\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial u}{\partial x}+au$ به معادله $\frac{\partial v}{\partial t}=c\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ باید تبدیل $u=e^{\alpha x+\beta t}v$ بکار گرفت. برای معادله بالا $\beta=0$ بدست می‌آید.

مثال (۲) معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial U}{\partial x} + b^2 U$ در ناحیه
$D:\ t>0$ و $x>0$ و با شرایط مرزی و اولیهٔ $u(0,t)=0 ;\ t>0$
و
$u(x,0)=\begin{cases} 0 ; & 0<x<m \\ u_0 e^{-bx} , & x>m \end{cases}$ درنظر می‌گیریم اولاً نشان دهید
که با بکارگیری تبدیل تابع $U=e^{\alpha x}V(x,t)$ و انتخاب مناسب α، می‌توان
معادله بالا را به معادله $\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ منجر نمود، α را حساب کرده
ثانیاً مسأله را روی تابع نوشته و آن را حل کرده و تابع $u(x,t)$ را
پیدا کنید.

حل:

$$\begin{cases} U=e^{\alpha x}V(x,t) \ ; \ \frac{\partial U}{\partial t}=e^{\alpha x}\frac{\partial V}{\partial t} \\ \frac{\partial U}{\partial x}=e^{\alpha x}\frac{\partial V}{\partial x}+\alpha e^{\alpha x}V \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=e^{\alpha x}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+2\alpha e^{\alpha x}\frac{\partial V}{\partial x}+\alpha^2 e^{\alpha x}V. \end{cases}$$

و بیان معادله برحسب تابع V:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2b\frac{\partial U}{\partial x}+b^2U \Rightarrow$$

$$e^{\alpha x}\frac{\partial V}{\partial t}=e^{\alpha x}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+2\alpha e^{\alpha x}\frac{\partial V}{\partial x}+\alpha^2 e^{\alpha x}V+2b\left(e^{\alpha x}\frac{\partial V}{\partial x}+\alpha e^{\alpha x}V\right)$$
$$+b^2e^{\alpha x}V$$

طرفین معادله را بر $e^{\alpha x}$ تقسیم نموده و طرف دوم معادله را برحسب مشتق‌های
تابع V برحسب x مرتب می‌کنیم:

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+2(\alpha+b)\frac{\partial V}{\partial x}+(\alpha^2+2b\alpha+b^2)V$$

و یا:

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+2(\alpha+b)\frac{\partial V}{\partial x}+(\alpha+b)^2V$$

دیده می‌شود که اگر $\alpha+b=0$ باشد یعنی $\underset{\sim\sim}{\alpha=-b}$، آنگاه ضریب $\frac{\partial V}{\partial x}$
و V توأماً (باهم زمان) صفر می‌شوند.
و معادله به صورت: $\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ درمی‌آید.

لذا با بکارگیری تبدیل $u(x,t)=e^{-bx}v(x,t)$ مسأله بالا روی تابع v به این صورت بیان می‌شود

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\;;\quad x>0\;,\; t>0 \quad (c=1)$$

$$v(0,t)=e^{bx_0}u(0,t)=0 \qquad t>0$$

$$v(x,0)=e^{bx}u(x,0)=\begin{cases}0 & 0<x<m\\ e^{bx}\cdot u_0e^{-bx}=u_0 & x>m\end{cases}=f(x)$$

و جواب مسأله برای تابع $v(x,t)$:

$$v(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi ct}}\int_0^\infty f(z)\left(e^{-\frac{(z-x)^2}{4ct}}-e^{-\frac{(z+x)^2}{4ct}}\right)dz \quad (c=1)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_m^\infty u_0\left(e^{-\frac{(z-x)^2}{4t}}-e^{-\frac{(z+x)^2}{4t}}\right)dz$$

$$=\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}}\left[\int_m^\infty e^{-\frac{(z-x)^2}{4t}}dz-\int_m^\infty e^{-\frac{(z+x)^2}{4t}}dz\right]$$

$\downarrow$

$$\frac{z-x}{2\sqrt{t}}=\eta \qquad \frac{z+x}{2\sqrt{t}}=\eta \qquad dz=2\sqrt{t}\,d\eta$$

$$v(x,t)=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{\frac{m-x}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-\eta^2}d\eta-\int_{\frac{m+x}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-\eta^2}d\eta\right]$$

$$=\frac{u_0}{2}\times\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^\infty-\int_0^{\frac{m-x}{2\sqrt{t}}}-\left(\int_0^\infty-\int_0^{\frac{m+x}{2\sqrt{t}}}\right)\right]$$

$$=\frac{u_0}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m+x}{2\sqrt{t}}}e^{-\eta^2}d\eta-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m-x}{2\sqrt{t}}}e^{-\eta^2}d\eta\right]$$

$$u(x,t)=e^{-bt}v(x,t)=\frac{u_0}{2}e^{-bt}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+m}{2}\right)+\operatorname{erf}\left(\frac{x-m}{2}\right)\right]$$

توجه: در حالت کلی برای منجر نمودن معادله $\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha u$ به معادله $\frac{\partial v}{\partial t}=c\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ باید تبدیل $u=e^{\alpha x+\beta t}v$ بکار گرفت. برای معادله بالا $\beta=0$ بدست می‌آید.

حل معادلهٔ انتشار در نیم صفحهٔ $-\infty < x < \infty$ و $t > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad -\infty < x < \infty \ , \ t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \qquad |u(x,y)| \leq M$$

جوابهای خصوصی $u(x,t) = X(x)T(t)$ این مسئله همانند همین جواب برای این معادله در ربع صفحهٔ $x > 0$ و $t > 0$ است ؛ یعنی داریم

$$u(x,t) = e^{-c\lambda^2 t}(A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)$$

منتها در اینجا شرط مرزی $u=0$ نداریم و برای بدست آوردن جواب نهائی معادله از تابع بالا روی λ انتگرال می‌گیریم :

$$u(x,t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-c\lambda^2 t}\left(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right)d\lambda \qquad (*)$$

و با اعمال شرط اولیهٔ $u(x,0) = f(x)$:

$$u(x,0) = \int_{\lambda=0}^{\infty}\left(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right)d\lambda = f(x)$$

این رابطه بیانگر بسط تابع $f(x)$ به انتگرال فوریه است و ضرایب $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ توسط انتگرال‌های زیر از روی تابع f بدست می‌آیند

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{z=-\infty}^{\infty} f(z)\cos\lambda z\,dz \quad , \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{z=-\infty}^{\infty} f(z)\sin\lambda z\,dz$$

با بردن $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ برحسب این انتگرال‌ها در جواب $(*)$

$$u(x,t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-c\lambda^2 t}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cos\lambda z\,dz\right)\cos\lambda x + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\sin\lambda z\,dz\right) \times \sin\lambda x\right]d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-c\lambda^2 t}\left[\int_{z=-\infty}^{\infty} f(z)\left(\underbrace{\cos\lambda z\cos\lambda x + \sin\lambda z\sin\lambda x}_{\cos(z-x)\lambda}\right)dz\right]d\lambda$$

و با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری :

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{z=-\infty}^{\infty} f(z)\left[\int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-ct\lambda^2}\cos(z-x)\lambda\, d\lambda\right]dz$$

ولی طبق انتگرال پواسن :

$$\int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-ct\lambda^2}\cos(z-x)\lambda\, d\lambda=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{ct}}\,e^{-\frac{(z-x)^2}{4ct}}$$

لذا جواب مسئله این چنین فرمول بندی می شود :

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi ct}}\int_{z=-\infty}^{\infty} f(z)\,e^{-\frac{(z-x)^2}{4ct}}dz}$$

مثال (۳)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad -\infty<x<\infty\ ,\ t>0$$

$$u(x,0)=\begin{cases}u_0 & |x|<a\\ 0 & |x|\geq a\end{cases}\qquad |u(x,t)|\leq M$$

در این مسئله :

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\leq -a\\ u_0 & -a<x<a\\ 0 & x\geq a\end{cases}$$ لذا :

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi ct}}\int_{z=-a}^{a} u_0\,e^{-\frac{(z-x)^2}{4ct}}dz\quad ;\quad \frac{z-x}{2\sqrt{ct}}=\eta$$

$$dz=2\sqrt{ct}\,d\eta$$

$$u(x,t)=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\eta=\frac{-a-x}{2\sqrt{ct}}}^{\frac{a-x}{2\sqrt{ct}}} e^{-\eta^2}d\eta$$

$$=\frac{u_0}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\eta=0}^{\frac{a-x}{2\sqrt{ct}}} e^{-\eta^2}d\eta-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{-a-x}{2\sqrt{ct}}} e^{-\eta^2}d\eta\right]$$

$$=\frac{u_0}{2}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{a-x}{2\sqrt{ct}}\right)-\mathrm{erf}\left(-\frac{a+x}{2\sqrt{ct}}\right)\right]$$

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{a-x}{2\sqrt{ct}}\right)+\mathrm{erf}\left(\frac{a+x}{2\sqrt{ct}}\right)\right]$$

مثال (٤)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u_0 \cos x \;; & -\infty<x<\infty \;\text{و}\; t>0 \\ u(x,0)=0 \;;\; x\in\mathbb{R} & |u(x,t)|<M \end{cases}$$

حل - با بکارگیری تبدیل $u(x,t)=v(x,t)+y(x)$ ، و تعیین تابع $y(x)$ بطوریکه روی v معادله همگن شود.

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = c\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + y''(x)\right) + u_0\cos x$$

لذا بایستی $c\,y''(x)+u_0\cos x = 0$ یا: $y''(x) = -\frac{u_0}{c}\cos x$

و با دوبار انتگرال گیری:

$$y(x)=\frac{u_0}{c}\cos x + Ax+B$$

$$u(x,t)=v(x,t)+\frac{u_0}{c}\cos x+Ax+B$$

بلحاظ کراندار بودن توابع u و v ، بایستی $A=0$ باشد، ضریب B هم نامعین باقی می ماند آن را هم صفر می گیریم:

$$u(x,t)=v(x,t)+\frac{u_0}{c}\cos x$$

و بیان مسأله روی تابع v:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=c\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\;;\; -\infty<x<\infty,\; t>0$$

$$v(x,0)=u(x,0)-\frac{u_0}{c}\cos x = 0-\frac{u_0}{c}\cos x$$

$$\Rightarrow v(x,0)=-\frac{u_0}{c}\cos x = f(x)$$

و $|v(x,t)|<M$

$$v(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi c t}}\int_{z=-\infty}^{\infty} f(z)\, e^{-\frac{(z-x)^2}{4ct}}dz = -\frac{u_0}{2c\sqrt{\pi c t}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos z\, e^{-\frac{(z-x)^2}{4ct}}dz$$

در این انتگرال تغییر متغیر $\frac{z-x}{2\sqrt{ct}}=\eta$ یعنی $z=2\sqrt{ct}\,\eta+x$ بکار می بریم

داریم $dz=2\sqrt{ct}\,d\eta$ و

$z\to+\infty \Rightarrow \eta\to+\infty$

$z\to-\infty\Rightarrow\eta\to-\infty$

بنابراین:

$$v(x,t)=-\frac{u_0}{c\sqrt{\pi}}\int_{\eta=-\infty}^{\infty}\cos(2\sqrt{ct}\,\eta+x)\,e^{-\eta^2}d\eta$$

$$(\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B)$$

$$V(x,t) = -\frac{u_0}{c\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\cos(2\sqrt{ct}\,\eta)\cos x - \sin(2\sqrt{ct}\,\eta)\sin x \right) e^{-\eta^2} d\eta$$

$$= -\frac{u_0}{c\sqrt{\pi}} \left[\cos x \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\sqrt{ct}\,\eta) e^{-\eta^2} d\eta - \sin x \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\sqrt{ct}\,\eta) e^{-\eta^2} d\eta \right]$$

توابع $\cos(2\sqrt{ct}\,\eta)e^{-\eta^2}$ و $\sin(2\sqrt{ct}\,\eta)e^{-\eta^2}$ به ترتیب زوج و فرد می باشند ، بنا براین :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\sqrt{ct}\,\eta) e^{-\eta^2} d\eta = 2\int_{0}^{\infty} \cos(2\sqrt{ct}\,\eta) e^{-\eta^2} d\eta$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\sqrt{ct}\,\eta) e^{-\eta^2} d\eta = 0$$

لذا :

$$V(x,t) = -\frac{2u_0}{c\sqrt{\pi}} \left(\int_{0}^{\infty} e^{-\eta^2} \cos(2\sqrt{ct}\,\eta)\, d\eta \right) \cos x$$

واین انتگرال پواسن است با $a=1$ و $b=2\sqrt{ct}$:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-a\eta^2} \cos(b\eta)\, d\eta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}} \qquad a>0.$$

لذا :

$$V(x,t) = -\frac{2u_0}{c\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1}}\, e^{-\frac{4ct}{4\times 1}} \cos x = -\frac{u_0}{c} e^{-ct} \cos x$$

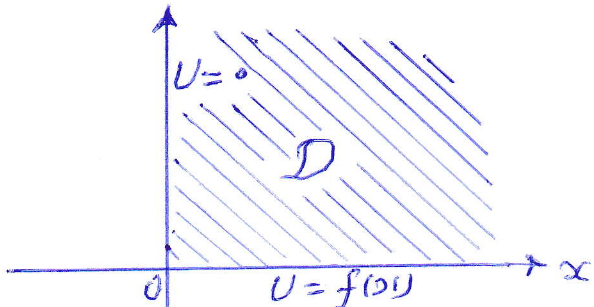
وسرانجام :

$$u(x,t) = V(x,t) + \frac{u_0}{c}\cos x$$

$$u(x,t) = -\frac{u_0}{c} e^{-ct} \cos x + \frac{u_0}{c}\cos x = \frac{u_0}{c}(1 - e^{-ct})\cos x$$

حل معادلهٔ لاپلاس در ربع صفحه $x>0$ و $y>0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \;; & x>0 \text{ و } y>0 \\ u(0,y)=0 \;; & y>0 \\ u(x,0)=f(x) \;; & x>0 \\ |u(x,y)|<M \end{cases}$$



حل - با قرار دادن تابع $u(x,y)=X(x)Y(y)$ در معادله و جداسازی متغیرها بدست می‌آوریم:

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=K=-\lambda^2 \quad (K<0)$$

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda^2X(x)=0 \Rightarrow X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x \\ Y''(y)-\lambda^2Y(y)=0 \qquad Y(x)=c_3e^{\lambda y}+c_4e^{-\lambda y} \end{cases}$$

با توجه به کراندار بودن جواب‌های پایه‌ای لازم است که $c_3=0$ باشد در نتیجه:

$$u(x,y)=c_4e^{-\lambda y}(c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x)$$
$$=e^{-\lambda y}(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)$$

با اعمال شرط مرزی $u(0,y)=0$ ، $A=0$ بدست می‌آوریم لذا:

$$\underline{\underline{u(x,y)=B(\lambda)e^{-\lambda y}\sin\lambda x}} \quad \lambda>0$$

(توجه کنید در این مسأله هم در حالت‌های $K=0$ و $K>0$ با توجه به شرط مرزی $u(0,y)=0$ و کراندار بودن جواب به جواب پوچ $u(x,y)=0$ می‌رسیم)

و جواب نهائی معادله:

$$\underline{\underline{u(x,y)=\int_{\lambda=0}^{\infty}B(\lambda)e^{-\lambda y}\sin\lambda x\,d\lambda}} \qquad (*)$$

و با اعمال شرط مرزی $u(x,0)=f(x)$:

$$u(x,0)=\int_{\lambda=0}^{\infty} B(\lambda)\sin\lambda x\, d\lambda = f(x)$$

این رابطه بیانگر بسط تابع $f(x)$ به انتگرال سینوسی - فوریه است و ضریب $B(\lambda)$ توسط این انتگرال از روی تابع f بدست می‌آید

$$B(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_{z=0}^{\infty} f(z)\sin\lambda z\, dz$$

با بردن $B(\lambda)$ از روی این انتگرال در تابع (*)

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_{\lambda=0}^{\infty}\left(\int_{z=0}^{\infty} f(z)\sin\lambda z\, dz\right)e^{-\lambda y}\sin\lambda x\, d\lambda$$

و با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری:

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_{z=0}^{\infty} f(z)\left[\int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\lambda y}\sin\lambda z\sin\lambda x\, d\lambda\right]dz$$

ولی داریم:

$$\int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\lambda y}\sin\lambda z\sin\lambda x\, d\lambda=\frac{1}{2}\int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-y\lambda}\left[\cos(z-x)\lambda-\cos(z+x)\lambda\right]d\lambda$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{y}{y^2+(z-x)^2}-\frac{y}{y^2+(z+x)^2}\right]$$

(توجه:

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-a\lambda}\cos b\lambda\, d\lambda=\frac{a}{a^2+b^2}\right.$$

لذا:

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_{z=0}^{\infty} f(z)\times\frac{1}{2}\left[\frac{y}{y^2+(z-x)^2}-\frac{y}{y^2+(z+x)^2}\right]dz$$

و جواب مسئله:

$$\boxed{u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{z=0}^{\infty}\left[\frac{y}{y^2+(z-x)^2}-\frac{y}{y^2+(z+x)^2}\right]f(z)\, dz}$$

در حالت خاص $f(x)=u_0$

$$u(x,y)=\frac{u_0}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{z-x}{y}\right)^2}-\frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{z+x}{y}\right)^2}\right]dz=\frac{u_0}{\pi}\left[\operatorname{Arctg}\frac{z-x}{y}-\operatorname{Arctg}\frac{z+x}{y}\right]_{z=0}^{\infty}$$

$$=\frac{u_0}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctg}\frac{-x}{y}-\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctg}\frac{x}{y}\right)\right]=\frac{2u_0}{\pi}\operatorname{Arctg}\frac{x}{y}$$

مثال (۵) نشان دهید که جواب معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ ؛ $|u|\le M$ ،
در ربع صفحه $x>0$ ، $y>0$ ، تحت شرایط مرزی $u(0,y)=u_0$ و $u(x,0)=u_0(1+e^{-x})$ ، چنین است :

$$u(x,y)=u_0\left(1+\frac{2}{\pi}\int_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\lambda}{1+\lambda^2}e^{-\lambda y}\sin\lambda x\,d\lambda\right)$$

حل : در معادله تبدیل $u(x,y)=v(x,y)+u_0$ بکار می بریم تا مسئله روی تابع v

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \;;\; x>0,\ y>0 \;;\; v(0,y)=0 \;,\; v(x,0)=u_0e^{-x}$$

$|v(x,y)|\le M$

با بردن تابع $v(x,y)=X(x)Y(y)$ در معادله و جداسازی متغیرها :

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda^2 \Rightarrow v(x,y)=(c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x)(c_3e^{\lambda y}+c_4e^{-\lambda y})$$

با اعمال شرط $v(0,y)=0$ ، بدست می آوریم $c_1=0$ و با اعمال شرط کراندار بودن جواب : $c_3=0$ لذا :

$$v(x,y)=c_2c_4e^{-\lambda y}\sin\lambda x=B(\lambda)e^{-\lambda y}\sin\lambda x \qquad \lambda>0$$

و جواب نهائی معادله روی تابع v :

$$v(x,y)=\int_{\lambda=0}^{\infty}B(\lambda)e^{-\lambda y}\sin\lambda x\,d\lambda \qquad (*)$$

حال شرط اولیه $v(x,0)=u_0e^{-x}$ را روی تابع $(*)$ اعمال می کنیم

$$v(x,0)=\int_{\lambda=0}^{\infty}B(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda=u_0e^{-x}=f(x)$$

و لذا :

$$B(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_{z=0}^{\infty}f(z)\sin\lambda z\,dz=\frac{2}{\pi}\int_{z=0}^{\infty}u_0e^{-z}\sin\lambda z\,dz$$

$$\Rightarrow B(\lambda)=\frac{2u_0}{\pi}\times\frac{\lambda}{1^2+\lambda^2}$$ (توجه : $\int_0^{\infty}e^{-az}\sin bz\,dz=\frac{b}{a^2+b^2}$ ، $a>0$)

لذا :

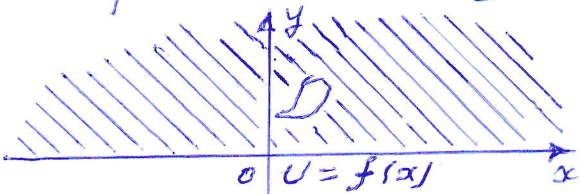
$$(*)\Rightarrow v(x,y)=\frac{2u_0}{\pi}\int_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\lambda}{1+\lambda^2}e^{-\lambda y}\sin\lambda x\,d\lambda$$

$$u(x,y)=v+u_0=u_0+\frac{2u_0}{\pi}\int_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\lambda}{1+\lambda^2}e^{-y\lambda}\sin x\lambda\,d\lambda$$

حل معادلهٔ لاپلاس در نیم صفحه $-\infty < x < \infty$ و $y > 0$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad -\infty < x < \infty \quad y > 0$$

$$|u(x,y)| < M \quad ; \quad u(x,0) = f(x)$$



حل - همانند حل معادلهٔ لاپلاس در ربع صفحه با توجه به کراندار بودن جواب بدست می‌آوریم:

$$u(x,y) = X(x)Y(y) = e^{-\lambda y}\left(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right)$$

در این مسئله شرط مرزی $u=0$ نداریم لذا با انتگرال گیری از تابع بالا روی λ، جواب معادله بدست می‌آید:

(*)
$$u(x,y) = \int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\lambda y}\left(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right)d\lambda$$

و با اعمال شرط مرزی $u(x,0)=f(x)$ بدست می‌آوریم

$$u(x,0) = \int_{\lambda=0}^{\infty}\left(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right)d\lambda = f(x)$$

و از اینجا:

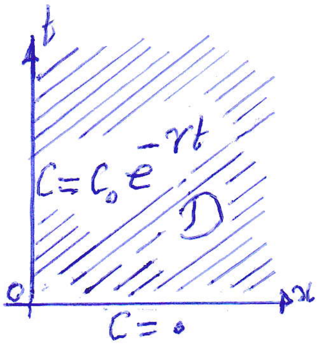
$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{z=-\infty}^{+\infty} f(z)\cos\lambda z\, dz \quad , \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\sin\lambda z\, dz$$

و با بردن این انتگرال‌ها در تابع (*) و سپس تعویض انتگرال گیری:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\lambda y}\left[\left(\int_{z=-\infty}^{\infty} f(z)\cos\lambda z\, dz\right)\cos\lambda x + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\sin\lambda z\, dz\right)\times\sin\lambda z\right]dz$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{z=-\infty}^{\infty} f(z)\left[\int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\lambda y}\cos(z-x)\lambda\, d\lambda\right]dz$$

$$\boxed{u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{z=-\infty}^{\infty}\frac{y}{y^2+(z-x)^2}f(z)\,dz}$$



حل معادلهٔ

$$\frac{\partial C}{\partial t}=D_L\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}-u\frac{\partial C}{\partial x},\quad x>0,\quad t>0 \qquad (1)$$

$$C(0,t)=C_0e^{-\gamma t} \qquad t>0 \qquad (2)$$

$$C(x,0)=0 \qquad x>0 \qquad (3)$$

C_0، γ، D_L و u مقادیر ثابت و مثبتی هستند:

حل - در این معادله ابتدا تبدیل تابع $C(x,t)=e^{-\gamma t+\alpha x}V(x,t)$ به کار می‌بریم و ضریب α را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که ضریب V در معادلهٔ بدست آمده مساوی صفر شود.

$$\frac{\partial C}{\partial t}=D_L\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}-u\frac{\partial C}{\partial x}\Rightarrow e^{-\gamma t+\alpha x}\frac{\partial V}{\partial t}-\gamma e^{-\gamma t+\alpha x}V$$

$$=D_L\left(e^{-\gamma t+\alpha x}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+2\alpha e^{-\gamma t+\alpha x}\frac{\partial V}{\partial x}+\alpha^2e^{-\gamma t+\alpha x}V\right)$$

$$-u\left(e^{-\gamma t+\alpha x}\frac{\partial V}{\partial x}+\alpha e^{-\gamma t+\alpha x}V\right)$$

طرفین معادله را بر $e^{-\gamma t+\alpha x}$ تقسیم می‌کنیم و با مرتب کردن معادله بدست می‌آوریم:

$$\frac{\partial V}{\partial t}=D_L\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+(2D_L\alpha-u)\frac{\partial V}{\partial x}+(D_L\alpha^2-u\alpha+\gamma)V \qquad (4)$$

حال α را چنان تعیین می‌کنیم که

$$D_L\alpha^2-u\alpha+\gamma=0$$

$$\alpha=\frac{u}{2D_L}-\sqrt{\frac{u^2}{4D_L^2}-\frac{\gamma}{D_L}}$$

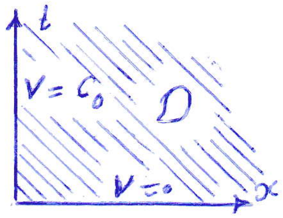
و ضریب $\frac{\partial V}{\partial x}$ در معادله (4)

$$2D_L\alpha-u=2D_L\left(\frac{u}{2D_L}-\sqrt{\frac{u^2}{4D_L^2}-\frac{\gamma}{D_L}}\right)-u=-\sqrt{u^2-4D_L\gamma}$$

و $\sqrt{u^2-4D_L\gamma}$ را به u_0 نشان می‌دهیم.

$$u_0=\sqrt{u^2-4D_L\gamma}>0$$

بنابراین روی تابع V، معادله همراه با شرایط مرزی و اولیهٔ زیر داریم



$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} = D_L \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} - u_0 \dfrac{\partial V}{\partial x} \; ; \; x>0 \,,\; t>0 & (۵) \\ C(0,t) = e^{-\gamma t} V(0,t) \Rightarrow c_0 e^{-\gamma t} = e^{-\gamma t} V(0,t) \Rightarrow \underline{\underline{V(0,t) = c_0}} & (۶) \\ C(x,0) = e^{\alpha x} V(x,0) \Rightarrow 0 = e^{\alpha x} V(x,0) \Rightarrow \underline{\underline{V(x,0) = 0}} & (۷) \end{cases}$$

مجدداً در معادله‌ی (۵) تبدیل تابع $V(x,t)=w(x,t)+c_0$ بکار می‌بریم
به روشنی مسأله روی تابع w این چنین بیان می‌شود.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = D_L \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - u_0 \dfrac{\partial w}{\partial x} \; ; \; x>0 \,,\; t>0 & (۸) \\ w(0,t) = 0 \quad t>0 & (۹) \\ w(x,0) = -c_0 \quad x>0 & (۱۰) \end{cases}$$

و بالاخره در معادله‌ی (۸) تبدیل تابع $w(x,t)=e^{px+qt}Y(x,t)$ بکار می‌بریم
و p و q را چنان تعیین می‌کنیم که روی تابع $Y(x,t)$ ، معادله‌ی
$\dfrac{\partial Y}{\partial t}=D_L\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ داشته باشیم. با تبدیل معادله‌ی (۸) روی تابع V
بدست می‌آوریم:

$$e^{px+qt}\frac{\partial Y}{\partial t} + q e^{px+qt} Y = D_L\left(e^{px+qt}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + 2p e^{px+qt}\frac{\partial Y}{\partial x} + p^2 e^{px+qt} Y\right) - u_0\left(e^{px+qt}\frac{\partial Y}{\partial x} + p e^{px+qt} Y\right)$$

با حذف e^{px+qt} از طرفین معادله و مرتب کردن معادله:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + (2D_L p - u_0)\frac{\partial Y}{\partial x} + (D_L p^2 - u_0 p - q) Y \qquad (۱۱)$$

حال قرار می‌دهیم:

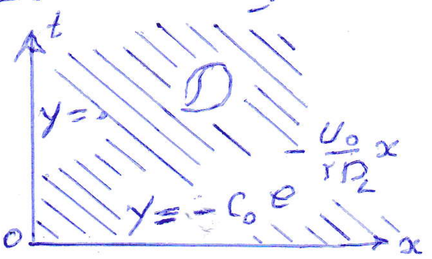
$$\begin{cases} 2D_L p - u_0 = 0 \\ D_L p^2 - u_0 p - q = 0 \end{cases}$$

و از آنجا:

$$\begin{cases} p = \dfrac{u_0}{2D_L} \\ q = -\dfrac{u_0^2}{4D_L} \end{cases}$$

بنابراین :
$$w(x,t) = e^{\frac{u_0}{2D_L}x - \frac{u_0^2}{4D_L}t}\, y(x,t)$$

و بیان مسأله روی تابع y :



$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} = D_L \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} \; ; \; x>0 \;,\; t>0 & (12) \\ y(0,t) = 0 \; ; \; t>0 & (13) \\ y(x,0) = -C_0 e^{-\frac{u_0}{2D_L}x} \; ; \; x>0 & (14) \end{cases}$$

در هر سه مسأله بالا شرط کراندار بودن جواب نیز داریم ، مسأله روی تابع y یک مسأله استاندارد است و همانطور که قبلاً دیدیم جواب آن عبارتست از :

$$y(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D_L t}} \int_0^\infty f(z)\left[e^{-\frac{(z-x)^2}{4D_L t}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{4D_L t}}\right] dz$$

که در آنجا :

$$f(z) = y(z,0) = -C_0 e^{-\frac{u_0}{2D_L}z}$$

است لذا :

$$y(x,t) = \frac{-C_0}{2\sqrt{\pi D_L t}} \int_0^\infty \left[e^{-\frac{(z-x)^2}{4D_L t} - \frac{u_0}{2D_L}z} - e^{-\frac{(z+x)^2}{4D_L t} - \frac{u_0}{2D_L}z}\right] dz \qquad (15)$$

در زیر نشان می دهیم که این انتگرال به تابع خطا منجر می شود :

برای این کار می نویسیم :

$$\frac{(z-x)^2}{4D_L t} + \frac{u_0}{2D_L}z = \frac{1}{4D_L t}\left[z^2 - 2xz + x^2 + 2u_0 t z\right]$$

$$= \frac{1}{4D_L t}\left[z^2 + 2(-x+u_0 t)z + (-x+u_0 t)^2 - (-x+u_0 t)^2 + x^2\right]$$

$$= \frac{1}{4D_L t}\left[(z-x+u_0 t)^2 + 2u_0 x t - u_0^2 t^2\right] = \frac{2u_0 x - u_0^2 t}{4D_L} + \frac{(z-x+u_0 t)^2}{4D_L t}$$

لذا :

$$e^{-\frac{(z-x)^2}{4D_L t}-\frac{u_0}{2D_L t}} = e^{\frac{u_0^2 t-2u_0 x}{4D_L}}\cdot e^{-\frac{(z-x+u_0 t)^2}{4D_L t}}$$

وشابهاً با تبدیل x به $-x$:

$$e^{-\frac{(z+x)^2}{4D_L t}-\frac{u_0}{2D_L}z} = e^{\frac{u_0^2 t+2u_0 x}{4D_L}}\cdot e^{-\frac{(z+x+u_0 t)^2}{4D_L t}}$$

و با بردن این عبارت‌ها در انتگرال (۱۵) :

$$Y(x,t) = -\frac{c_0}{2\sqrt{\pi D_L t}}\Big[e^{\frac{u_0^2 t-2u_0 x}{4D_L}}\int_0^\infty e^{-\frac{(z-x+u_0 t)^2}{4D_L t}}dz - e^{\frac{u_0^2 t+2u_0 x}{4D_L}}\int_0^\infty e^{-\frac{(z+x+u_0 t)^2}{4D_L t}}dz\Big]$$

و با بردن جواب روی تابع W

$$W(x,t) = e^{\frac{u_0}{2D_L}x-\frac{u_0^2 t}{4D_L}}\,y(x,t)$$

$$= -\frac{c_0}{2\sqrt{\pi D_L t}}\Big[\int_0^\infty e^{-\frac{(z-x+u_0 t)^2}{4D_L t}}dz - e^{\frac{u_0 x}{D_L}}\int_0^\infty e^{-\frac{(z+x+u_0 t)^2}{4D_L t}}dz\Big]$$

حال در انتگرال سمت چپ تغییر متغیر $\frac{z-x+u_0 t}{2\sqrt{D_L t}}=\eta$ و در انتگرال سمت راست تغییر متغیر $\frac{z+x+u_0 t}{2\sqrt{D_L t}}=\eta$ بکار می‌بریم و برای هر دو انتگرال :

لذا : $dz = 2\sqrt{D_L t}\,d\eta$

$$W(x,t) = -\frac{c_0}{\sqrt{\pi}}\Big[\int_{\frac{-x+u_0 t}{2\sqrt{D_L t}}}^\infty e^{-\eta^2}d\eta - e^{\frac{u_0 x}{D_L}}\int_{\frac{x+u_0 t}{2\sqrt{D_L t}}}^\infty e^{-\eta^2}d\eta\Big]$$

$$w(x,t) = -\frac{C_0}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^{\infty} e^{-\eta^2}d\eta - \int_0^{\frac{-x+u_0t}{2\sqrt{D_Lt}}} e^{-\eta^2}d\eta\right) - e^{\frac{u_0x}{D_L}}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x+u_0t}{2\sqrt{D_Lt}}}^{\infty} e^{-\eta^2}d\eta\right)\right]$$

$$= -\frac{C_0}{2}\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{-x+u_0t}{2\sqrt{D_Lt}}\right) - e^{\frac{u_0x}{D_L}}\operatorname{erfc}\left(\frac{x+u_0t}{2\sqrt{D_Lt}}\right)\right]$$

توجه :

$$\text{تابع خطا} = \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\eta^2}d\eta$$

$$\text{متمم تابع خطا} = \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-\eta^2}d\eta = 1-\operatorname{erf}(x)$$

و جواب مسأله برای تابع V :

$$V(x,t) = w(x,t) + C_0$$

$$= \frac{C_0}{2}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{-x+u_0t}{2\sqrt{D_Lt}}\right) + e^{\frac{u_0x}{D_L}}\operatorname{erfc}\left(\frac{x+u_0t}{2\sqrt{D_Lt}}\right)\right]$$

$$= \frac{C_0}{2}\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{x-u_0t}{2\sqrt{D_Lt}}\right) + e^{\frac{u_0x}{D_L}}\operatorname{erfc}\left(\frac{x+u_0t}{2\sqrt{D_Lt}}\right)\right]$$

$$= \frac{C_0}{2}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x-u_0t}{2\sqrt{D_Lt}}\right) + e^{\frac{u_0x}{D_L}}\operatorname{erfc}\left(\frac{x+u_0t}{2\sqrt{D_Lt}}\right)\right]$$

و در نهایت جواب برای تابع $C(x,t)$:

$$C(x,t) = e^{-\gamma t + \alpha x}V(x,t)$$

که بدست آوردیم :

$$\alpha = \frac{u}{2D_L} - \sqrt{\frac{u^2}{4D_L^2} - \frac{\gamma}{D_L}} = \frac{u-\sqrt{u^2-4\gamma D_L}}{2D_L}$$

یا

$$\alpha = \frac{u-u_0}{2D_L}$$

$$C(x,t) = e^{-\gamma t + \frac{u-u_0}{2D_L}x}V(x,t)$$

$$c(x,t)=e^{-\gamma t+\frac{u-u_0}{2D_L}x}\times\frac{C_0}{2}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x-u_0t}{2\sqrt{D_Lt}}\right)+e^{\frac{u_0x}{D_L}}\operatorname{erfc}\left(\frac{x+u_0t}{2\sqrt{D_Lt}}\right)\right]$$

$$C(x,t)=\frac{C_0}{2}e^{-\gamma t+\frac{u}{2D_L}x}\left[e^{-\frac{u_0x}{2D_L}x}\operatorname{erfc}\left(\frac{x-u_0t}{2\sqrt{D_Lt}}\right)+e^{\frac{u_0x}{2D_L}}\operatorname{erfc}\left(\frac{x+u_0t}{2\sqrt{D_Lt}}\right)\right]$$

که در این فرمول $u_0=\sqrt{u^2+4\gamma D_L}$ است.

و جواب برحسب تمام پارامترهای اصلی مسئله

$$\boxed{c(x,t)=\frac{C_0}{2}e^{-\gamma t+\frac{u}{2D_L}x}\left[e^{-\sqrt{\frac{u^2}{4D_L^2}-\frac{\gamma}{D_L}}\,x}\operatorname{erfc}\left(\frac{x-\sqrt{u^2+4\gamma D_L}\,t}{2\sqrt{D_Lt}}\right)+e^{\sqrt{\frac{u^2}{4D_L^2}-\frac{\gamma}{D_L}}\,x}\operatorname{erfc}\left(\frac{x+\sqrt{u^2+4\gamma D_L}\,t}{2\sqrt{D_Lt}}\right)\right]}$$